

接触力学の基礎

接触とは、二つの物体が隙間なく接している状態である。二つの物体を互いに押し付けあうと、接した状態が維持される。逆に、二つの物体を引き離す方向の力を加えると、隙間があいて分離する。接触力学とは、接触が起こり得る二つの固体の変形や運動を調べる学問である。

1. 接触条件

接触問題の簡単な例を図 1(a) に示す。これは、トラスとその右側にある剛体の壁（空間に固定してあるものとする）とからなる系である。外力 \mathbf{p} の大きさが十分に大きければ節点 (A) は剛体に接触するし、そうでなければ接触しない。このような節点のことを、接触候補の節点 (contact candidate node) とよぶ。壁が剛体であるという仮定より、外力 \mathbf{p} がいくら大きくても節点 (A) が剛体にめりこむことはない。また、節点 (A) を剛体から引きはがすときは粘着力（固着力）なしで引きはがせるものと仮定する。このような接触条件のことを、片側接触条件とよぶ。

つぎに、接触問題は構造力学の通常の問題とどう異なるかを説明する。

図 1(a) の接触問題では、トラスの変形後に節点 (A) が剛体に接触するか否かは、問題を解く前にはわからない。もし「変形後に接触しない」が正解であることが予めわかっているならば、この問題は図 1(b) に示す 2 自由度の問題と同じである。また、もし「変形後に接触する」が正解であることが予めわかっているならば、この問題は図 1(c) に示す 1 自由度の問題と同じである（図中の p_y は外力 \mathbf{p} の y 方向成分である）。この二つの問題は、それぞれ構造力学の通常の問題として解けるものであり、もはや接触問題ではない。しかし実際には、節点 (A) が剛体に接触するかないかは、外力 \mathbf{p} の大きさや初期ギャップ g_0 の大きさ、トラスの剛性などに依存するため、前もって知ることはできない。この例のように接触候補の節点の一つの場合には、二つの場合を解いてみればどちらが正解かを知ることができる。しかし、接触候補の節点が多数ある場合には、場合わけの数は組合せ的に増えるためすべての場合を解いてみることは事実上不可能になる。これが、接触問題の本質的な難しさである。

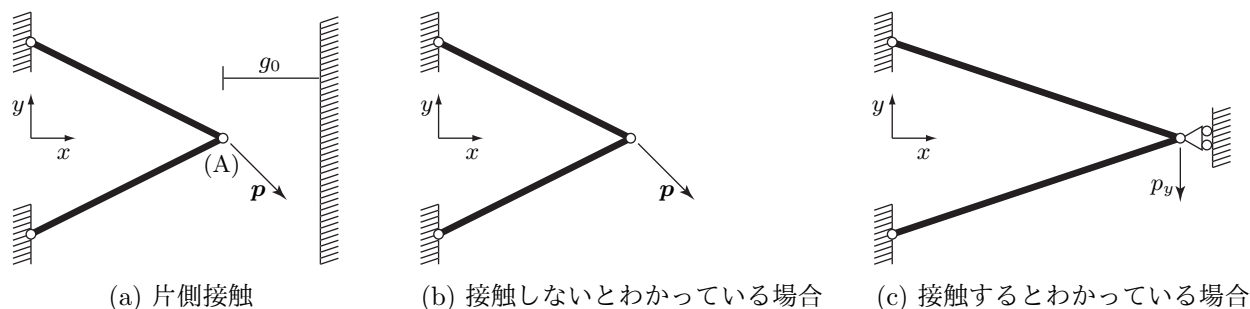


図 1: 剛体とトラスの接触問題

2. 境界条件と接触条件

構造物の節点が満たす境界条件には、通常、次の二種類がある：

- Neumann 境界条件：外力を指定，変位は未知。
- Dirichlet 境界条件：変位を指定，反力は未知。

接触問題における接触候補の節点は、この二つの境界条件のどちらを満たすかが予めわからない状態にある。このことを、再び図 1(a) の例でみる。

トラスの変形後に、接触候補の節点 (A) が剛体に接触しないならば、図 1(b) に示すように節点 (A) は x 方向も y 方向も外力が指定されて変位が未知である。つぎに、接触するならば、図 1(c) に示すように、節点 (A) は x 方向の変位が指定されて反力が未知 (y 方向には外力が指定されて変位が未知) である。実際には、接触するかしないかは接触問題を解く前にはわからないため、節点 (A) がいずれの境界条件を満たすのかは問題を解く前にはわからない。言い換えると、釣合い点において実現される境界条件を正しく判定することが、接触問題を解く際には本質的に重要になる。

3 接触則と相補性条件

接触則を扱う基本的な道具は、相補性条件とよばれる条件である。

3.1. 場合わけによる表現

図 2(a) に示すような剛体と接触候補の節点について、節点の変位と剛体からの反力の関係調べてみよう。剛体から節点までの距離 (ギャップ) を g で表し、節点が剛体に及ぼす力 (反力) を r で表す。また、節点と剛体の間には摩擦は生じないとする。このため、反力は剛体の表面の法線ベクトル n (剛体内向きを正の向きとする) に平行である。

図 2(a) の剛体を、図 2(b) のようにばねで置き換えたモデルを考えることも多い。図 2(a) は、図 2(b) においてばねの剛性を無限大にまで大きくした場合に対応する (この関係性については、3.2 節で述べる)。



図 2: 壁との接触のモデル

図 2(a) において、まず、節点と壁とのギャップ g が満たすべき条件について考える。節点は剛体にめりこむことはないので、 g は不等式

$$g \geq 0 \quad (1)$$

を満たす。このとき、節点の状態は次の二つに分類できる：

- $g > 0$: 節点は自由である (つまり、剛体に接触していない)。
- $g = 0$: 節点は剛体に接触している。

ギャップ g は広義の変位と考えることができるので、 $g = 0$ の場合は変位が指定されて反力が未知という境界条件に相当している。

つぎに、反力 r が満たすべき条件について考える。節点は剛体にくっつくことはないと仮定しているので、 r は不等式

$$r \leq 0 \quad (2)$$

を満たす（ただし、圧縮力を負、引張力を正としている）。このとき、節点の状態は次の二つに分類できる：

- $r < 0$: 節点に反力が作用している。
- $r = 0$: 節点に反力が作用していない。

$r = 0$ の場合は節点に作用する力が 0 であると指定しているので、外力が指定されてギャップが未知という境界条件に相当している。

最後に、ギャップ g と反力 r の二者択一性について述べる。節点が剛体と接触していないとき（つまり、 $g > 0$ のとき）には、反力は作用することができない（つまり、 $r = 0$ である）。また、節点に反力が作用するとき（つまり、 $r < 0$ のとき）には、節点は剛体と接触していなければならない（つまり、 $g = 0$ である）。このことをまとめると、

$$g > 0 \text{ ならば } r = 0, \quad r < 0 \text{ ならば } g = 0 \tag{3}$$

と書ける。

(1), (2), (3) が、片側接触の条件である。これを図示すると、図 3 のようになる。

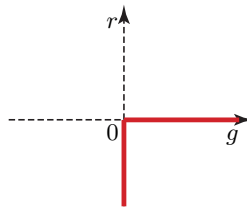


図 3: ギャップ g と反力 r の関係

3.2. 相補性条件による表現

3.1 節では、片側接触条件が (1), (2), (3) で定式化できることを述べた。このうち、条件 (3) は場合わけを含む条件であるため、理論的な考察や数値解析を行う際には不便である。この節では、相補性条件とよばれる条件を用いて片側接触条件を表現する方法を説明する。

条件 (3) は、 g と r の少なくとも一方はゼロであることを意味している。そしてこの条件は、 g と r の積がゼロであることと等価である。そこで、条件 (3) と (1) および (2) をまとめて、片側接触条

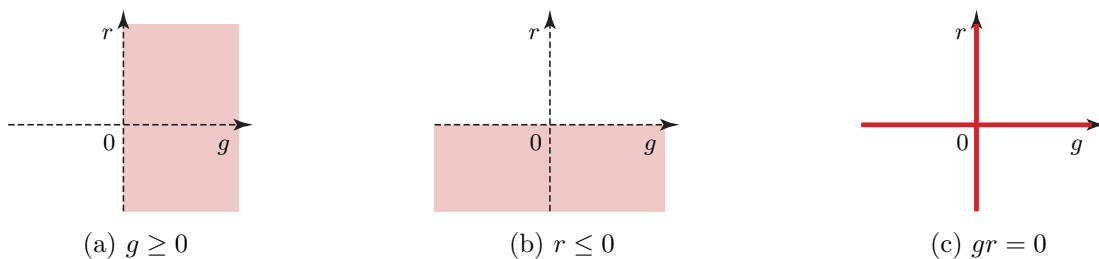


図 4: 条件 (4) の意味 ((a), (b), (c) の三つの条件をあわせると図 3 の領域になる)

件を

$$g \geq 0, \quad (4a)$$

$$r \leq 0, \quad (4b)$$

$$gr = 0 \quad (4c)$$

と書き直すことができる (図4)。このうち、(4c)を相補性条件とよぶ。このようにして、場合わけを含まない形で片側接触条件を表現することができた。

図3は、片側接触条件の構成則とみなせる。このことは、図2(b)に示すような、剛体を近似するばねモデルを考えると理解しやすい。ばねと節点は固着しないと仮定しているので、ばねが縮む場合のみ節点はばねに力を及ぼすことができる。したがって、このばねモデルの構成則は図5の左図のようになる¹。この図は、Hooke (フック)の法則を修正して $g > 0$ の場合に $r = 0$ としたものに相当する。 $g < 0$ は節点が剛体にめり込むことを意味するので、実際には許容されない。そこで、ばねの剛性をより大きくしていき、剛性が $+\infty$ となる極限をとると図5の右図が得られる。これは、片側接触条件 (図3) と一致している。

3.3. 凸解析と接触則

3.2節では、接触条件が相補性条件を用いて (4) のように表現できることを示した。この条件 (4) は、変位の一般化であるギャップ g と反力 r との関係を表しているので、接触条件の構成則とみなせる。この節では、接触条件に対応するひずみエネルギーの概念を導入し、そのエネルギーから構成則 (4) が自然に得られることを説明する。

まず、図5において、片側接触条件はばねモデルの剛性を無限大にしたときの極限であるとみなせる。図5ではばねの剛性を k とおくと、弾性エネルギーは

$$w(g) = \begin{cases} 0 & (g \geq 0 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2}kg^2 & (g < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5)$$

と表せる (図6の左上および中央上の図)。そこで、(5)で剛性 k を無限大にした極限として、接触条件のエネルギーを

$$w(g) = \begin{cases} 0 & (g \geq 0 \text{ のとき}) \\ +\infty & (g < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (6)$$

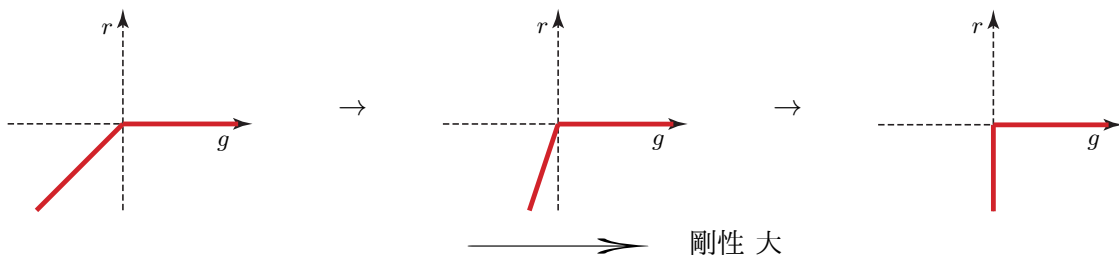


図5: ばねモデル (図2(b)) と片側接触条件 (図3) の関係

¹このような片側のばねモデルは、normal compliance model とよばれ、非線形のばねにも拡張されている。たとえば、 $c > 0$ と $m \geq 1$ をパラメータとして $r = -c(\max\{-g, 0\})^m$ とするモデル [3] は、摩擦を伴う接触問題の解の存在や一意性を議論する際などによく用いられている。

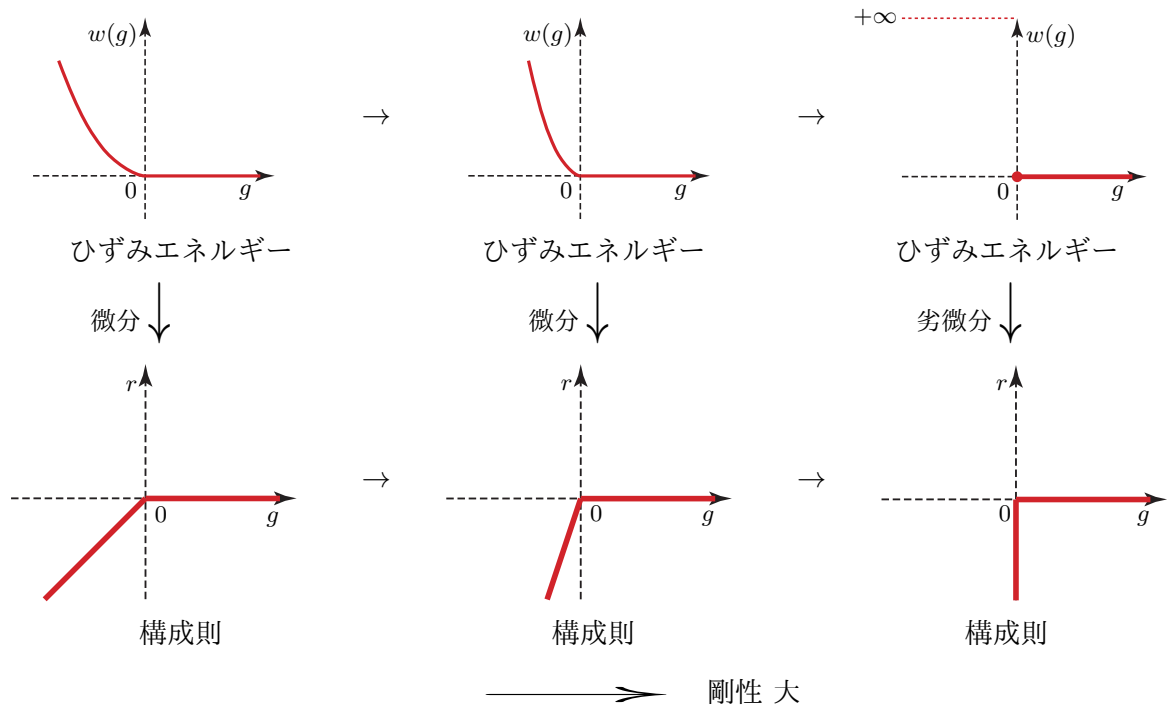


図 6: ばねモデルと剛体モデルのひずみエネルギーの関係

で定義することは自然に思える (図 6 の右上図). (6) で定義される (拡張実数値) 関数 w は, 集合 $\{g \in \mathbb{R} \mid g \geq 0\}$ の標示関数とよばれる.

一般に, ひずみエネルギー関数をひずみで微分すると構成則が得られる. 実際, 剛性 k が有限のとき, エネルギー (5) を微分するとばねモデルの構成則が得られる (図 6 の左と中央の図). 一方, 接触条件のエネルギー (6) は, 値が無限大の点を含むため, 普通の意味では微分できない. そこで, 微分を一般化した概念である劣微分を用いる². 関数 w の点 g における劣微分は

$$\partial w(g) = \{r \in \mathbb{R} \mid w(g') \geq w(g) + r(g' - g) \ (\forall g' \in \mathbb{R})\}$$

で定義され, これを実際に計算すると

$$\partial w(g) = \begin{cases} \{0\} & (g > 0 \text{ のとき}) \\ (-\infty, 0] & (g = 0 \text{ のとき}) \\ \emptyset & (g < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (7)$$

となる. そこで, 条件

$$r \in \partial w(g) \quad (8)$$

を図示すると図 6 の右下の図のようになり, 接触条件の構成則 (4) と等価であることがわかる. 条件 (8) が, ひずみエネルギーを用いた接触条件の表現である.

注意 1. (7) は次のようにして得られる. $g < 0$ のとき, 条件

$$w(g') \geq w(g) + r(g' - g) \ (\forall g' \in \mathbb{R}) \quad (9)$$

²劣微分の定義は, 講義資料「共役関数と劣勾配」を参照のこと.

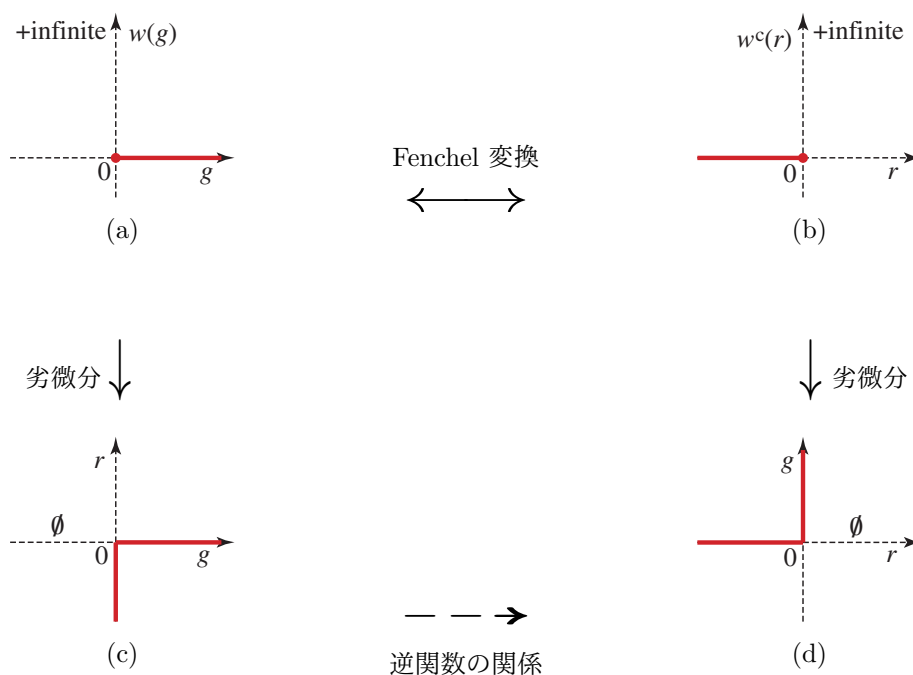


図 7: 片側接触条件の構成則とポテンシャル ((a) ひずみエネルギー, (b) 補ひずみエネルギー, (c) 構成則, (d) 構成則の逆関数)

を考えると, 不等式の右辺が常に無限大になるが左辺は $g' \geq 0$ に対して 0 になるので, この条件を満たす r は存在しない. つぎに, $g \geq 0$ のとき, 条件 (9) は

$$w(g') \geq r(g' - g) \quad (\forall g' \in \mathbb{R}) \quad (10)$$

となる. $g' < 0$ に対して左辺は無限大になるので不等式は任意の r について成り立つ. したがって, (10) は

$$0 \geq r(g' - g) \quad (\forall g' \geq 0) \quad (11)$$

と等価である. $g > 0$ のとき, $r \neq 0$ ならば, $g' - g$ が r と同じ符号をもつように $g' \geq 0$ を選ぶことができる. したがって, (11) が成り立つには $r = 0$ が必要であり, かつこれは十分条件でもある. $g = 0$ のとき, (11) はさらに

$$0 \geq rg' \quad (\forall g' \geq 0)$$

となるが, このための必要十分条件は $r \leq 0$ である. ■

次に, ひずみエネルギー w から補ひずみエネルギーを得るには, Fenchel 変換 (共役関数)³を用いる. w の共役関数は

$$w^*(r) = \sup_{g \in \mathbb{R}} \{rg - w(g)\}$$

で定義されるが, これを実際に計算すると

$$w^*(r) = \begin{cases} +\infty & \text{if } r > 0, \\ 0 & \text{if } r \leq 0 \end{cases} \quad (12)$$

³共役関数の定義は, 講義資料「共役関数と劣勾配」を参照のこと.

となる. このグラフを図7(b)に示す. w^* は, 集合 $\{r \in \mathbb{R} \mid r \leq 0\}$ の標示関数である. 最後に, 図7(d)のように g を r で表現するためには, 補ひずみエネルギー w^* の劣微分を考えればよい. これを実際に計算すると

$$\partial w^*(r) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } r > 0, \\ [0, +\infty) & \text{if } r = 0, \\ \{0\} & \text{if } r < 0 \end{cases}$$

となり, 図7(d)は

$$g \in \partial w^*(r) \tag{13}$$

と表せる.

参考文献

- [1] B. Brogliato: *Nonsmooth Mechanics (3rd ed.)*. Springer International Publishing, Switzerland (2016).
- [2] T. A. Laursen: *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin (2002).
- [3] J. A. C. Martins, J. T. Oden: Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **11**, 407–428 (1987).
- [4] P. Wriggers: *Computational Contact Mechanics (2nd ed.)*. Springer-Verlag, Berlin (2006).

(2017年4月, 寒野)