建築数理設計特論 講義資料（平成 **29** 年度第 **2** クォーター）

極限解析と線形計画

極限解析は，直接法とよばれる手法の一つであり，弾塑性構造物の挙動を把握するために古くから広く用いられている手法である [3–6]．直接法では，単調載荷などの適当な仮定の下で，弾塑性構造物が支持できる荷重の大きさの限界値を増分解析によらずに求める．降伏関数が応力の区分的線形関数として与えられるとき，極限解析が線形計画として定式化できることはよく知られている [2, 8]．また，下界定理と上界定理から得られる極限荷重係数の最良の下界と上界とが一致することを，線形計画の双対定理により示すことができる．以下では，これらのことを，トラス構造を例にして説明する．

1. 極限解析

極限解析の下界定理と上界定理について述べる．

1.1. 下界定理

トラス構造の節点変位の自由度を d で表す．パラメーター $\lambda > 0$ と定ベクトル $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$ $(\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0})$ を用いて，トラス構造に $\lambda \boldsymbol{p}$ で表される外力が作用することを考える．ここで，$\lambda \geq 0$ は荷重係数とよばれる．

トラスの部材数を m で表す．部材 i の伸びを e_i とおき，それを並べてできるベクトルを $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_m)^\top$ で表す．また，節点変位ベクトルを $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d$ で表す．適合行列を $B \in \mathbb{R}^{m \times d}$ とおくと，伸び $\boldsymbol{e}$ と変位 $\boldsymbol{u}$ の適合条件は

$$\boldsymbol{e} = B\boldsymbol{u} \tag{1}$$

と書ける．以下では，トラス構造が安定であること，つまり $\mathrm{rank}\, B = d$ であることを仮定する．従って，任意の外力に対して釣合いを満たす軸力が存在する．

部材 i に生じる軸力を q_i とおき，それを並べてできるベクトルを $\boldsymbol{q} = (q_1, \dots, q_m)^\top$ で表す．釣合い行列は $B^\top$ であることより，軸力 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^m$ と 外力 $\lambda \boldsymbol{p}$ の釣合いは

$$B^\top \boldsymbol{q} = \lambda \boldsymbol{p} \tag{2}$$

と書ける．簡単のために図 1 で示す構成則を仮定する．ここで，定数 R_i (> 0) は部材 i の降伏軸力の大きさである．各部材の降伏条件は

$$-R_i \leq q_i \leq R_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{3}$$

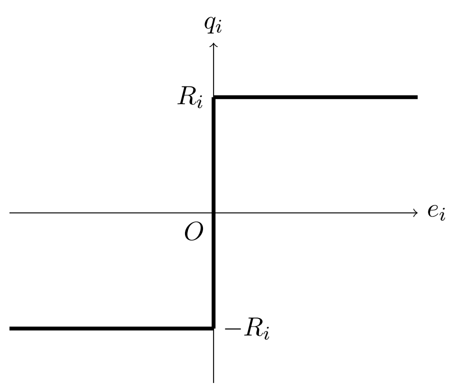

図 1: 構成則

で表される．

このような設定の下で，構造物が支持できる荷重の大きさ λ の限界値（最大値）を求めることを，極限解析という．また，λ の最大値を極限荷重係数[1]とよび，λ^* で表す（以上の設定の下では，$\lambda^* > 0$ が成り立つ）．

次の定理は λ^* の下界を与えているため，極限解析の下界定理とよばれている[2]．

定理 1. 実数 $\lambda_{\mathrm{s}} > 0$ に対して，ある内力 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^m$ が存在して外力との釣合い式

$$B^\top \boldsymbol{q} = \lambda_{\mathrm{s}} \boldsymbol{f}$$

および降伏条件 (3) が満たされるとき，$\lambda_{\mathrm{s}} \leq \lambda^*$ が成り立つ．

1.2. 上界定理

表記の簡単のために，適合条件 (1) を

$$e_i(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{b}_i^\top \boldsymbol{u}, \quad i = 1, \dots, m \tag{4}$$

と書くことにする．ただし，$\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m \in \mathbb{R}^d$ は定ベクトルである．

定数 $\lambda_{\mathrm{s}} > 0$ に対して，降伏条件を満たす内力 $\boldsymbol{q}$ が存在して外力 $\lambda_{\mathrm{s}}\boldsymbol{p}$ と釣り合うことを仮定する．このとき，仮想仕事の原理より，任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\lambda_{\mathrm{s}} \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{m} q_i e_i(\boldsymbol{u}) \tag{5}$$

が成り立つ．(5) の右辺を評価すると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} q_i e_i(\boldsymbol{u}) &\leq \sum_{i=1}^{m} \max\{q_i e_i(\boldsymbol{u}) \mid |q_i| \leq R_i\} \\ &= \sum_{i=1}^{m} R_i |e_i(\boldsymbol{u})| \end{aligned} \tag{6}$$

が得られる．従って，$\boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{u} > 0$ を満たす $\boldsymbol{u}$ に対して λ_{k} を

$$\lambda_{\mathrm{k}} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} R_i |e_i(\boldsymbol{u})|}{\boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{u}}$$

で定義すると，(5) および (6) より不等式

$$\lambda_{\mathrm{s}} \leq \lambda_{\mathrm{k}}$$

が得られる．

ここで下界定理より，$\lambda_{\mathrm{s}} \leq \lambda^*$ が成り立つ．一方，λ_{k} は節点変位 $\boldsymbol{u}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ から得られる荷重係数であり[3]，この節点変位は崩壊により生じるとみなすと $\lambda_{\mathrm{k}} \geq \lambda^*$ が成り立つと考えられる．このことを述べたのが，次の上界定理とよばれるものである[4]．

---

[1] 極限荷重係数は limit load factor の訳であるが，崩壊荷重係数とよばれることもある．

[2] 定理 1 は「下界定理」という名前でよばれているものの，少なくともこの時点では何らかの証明が可能なものではない [1]．むしろ，極限荷重係数という概念を導くための「原理」とでもよぶべきものである．

[3] $\boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{u} > 0$ を仮定したので，$\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ である．

[4] 「上界定理」も,「定理」という名前でよばれているものの，少なくともこの時点では「原理」とでもよぶべきものである．実は，定理 1 と定理 2 の λ_{s} および λ_{k} は，$\lambda_{\mathrm{s}} \leq \lambda^* \leq \lambda_{\mathrm{k}}$ を満たす．さらに，これら二つの不等号を等号で達成する $\boldsymbol{q}$ および $\boldsymbol{u}$ が存在する．これらのことを，2.3 節では線形計画の双対性を用いて示す．

定理 2. 実数 $\lambda_{\mathrm{k}} > 0$ に対して，条件 $\boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{u} > 0$ を満たす変位 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d$ が存在して不等式

$$\lambda_{\mathrm{k}} \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{u} \geq \sum_{i=1}^{m} R_i |e_i(\boldsymbol{u})| \tag{7}$$

が満たされるとき，$\lambda_{\mathrm{k}} \geq \lambda^*$ が成り立つ．

なお，(7) の左辺は外力仕事を表し，右辺は内力（塑性）仕事を表している．

2. 線形計画の双対性

下界定理（定理 1）を用いて極限荷重係数にできるだけ近い値を求めることは，$\boldsymbol{q}$ と λ が下界定理の仮定を満たすという制約の下で λ を最大化することに相当する．同様に，上界定理（定理 2）を用いて極限荷重係数にできるだけ近い値を求めることは，$\boldsymbol{u}$ と λ が上界定理の仮定を満たすという制約の下で λ を最小化することに相当する．実は，線形計画の双対性を用いることで，この最大値と最小値が一致することを示すことができる．

2.1. 主問題と双対問題

次の形の最適化問題を，線形計画の等式標準形とよぶ：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}\right\} \tag{8}$$

ただし，最適化の変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ である．また，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ は定行列であり，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ および $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は定ベクトルである．

問題 (8) に対して，同じデータ $A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を用いて定義される最適化問題

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} & A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{array}\right\} \tag{9}$$

のことを双対問題とよぶ．ただし，最適化の変数は $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ である．このとき，もとの問題 (8) のことを主問題とよぶ．双対問題も線形計画問題であり，等式標準形 (8) の形式に変形することができる．そのように変形した問題の双対問題を導くと，主問題 (8) に一致するという性質がある．

2.2. 双対性

線形計画の主問題 (8) と双対問題 (9) の実行可能解[5]に関して，弱双対定理とよばれる次の関係が成立する．

定理 3. 主問題 (8) の任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と双対問題 (9) の任意の実行可能解 $\boldsymbol{y}$ に対して，不等式

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$$

が成り立つ．

証明．問題 (8) と問題 (9) の制約より

$$\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}^\top A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$$

が得られる． □

[5]最適化問題の制約を満たす点のことを，実行可能解とよぶ．

弱双対定理より，双対問題 (9) の目的関数値が上に有界でなければ，主問題 (8) は実行可能解をもたない．また，主問題 (8) の目的関数値が下に有界でなければ，双対問題 (9) は実行可能解をもたない．さらに，もし実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ における目的関数値が一致すれば，$\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{y}$ はそれぞれの問題の最適解である．次に示す定理は強双対定理とよばれるが，この逆を保証するものである．

定理 4. 主問題 (8) と双対問題 (9) がともに実行可能解をもつことと，両者に最適解が存在して最適値[6]が一致することとは，同値である．

証明は省略する（文献 [9, 12] などを参照のこと）．

定理 4 から，線形計画問題の最適解を特徴づける条件が導かれる．

定理 5. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ が主問題 (8) と双対問題 (9) の最適解であるための必要十分条件は，これらが条件

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{10a}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \tag{10b}$$

$$A^\top \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}, \tag{10c}$$

$$x_j(\boldsymbol{c} - A^\top \boldsymbol{y})_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \tag{10d}$$

を満たすことである．ここで，$(\boldsymbol{c} - A^\top \boldsymbol{y})_j$ はベクトル $\boldsymbol{c} - A^\top \boldsymbol{y}$ の第 j 成分を表す．

証明. (10a) および (10b) は $\boldsymbol{x}$ が主問題 (8) の実行可能解であるための条件であり，(10c) は $\boldsymbol{y}$ が双対問題 (9) の実行可能解であるための条件である．$\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{y}$ が実行可能ならば，主問題 (8) と双対問題 (9) の目的関数の差は

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} - (A\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^\top (\boldsymbol{c} - A^\top \boldsymbol{y})$$

と書ける．$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ および $\boldsymbol{c} - A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ に注意すると，定理 4 より (10d) が得られる． □

変数 x_j と $(\boldsymbol{c} - A^\top \boldsymbol{y})_j$ に関する条件 (10d) のことを，相補性条件とよぶ．この条件は，x_j と $(\boldsymbol{c} - A^\top \boldsymbol{y})_j$ の少なくとも一方が 0 であることを表している．これはつまり，最適解では，各 $j = 1, \dots, n$ について主問題 (8) の不等式制約 $x_j \geq 0$ と双対問題 (9) の不等式制約 $(\boldsymbol{c} - A^\top \boldsymbol{y})_j \geq 0$ の少なくとも一方が等号で成立することを意味している．

最適性条件 (10) は，線形計画問題の解法の設計の基礎にもなる重要な条件である [12]．

2.3. 極限解析への応用

2.2 節で説明した線形計画の双対性の応用として，極限解析の下界定理と上界定理が線形計画の主問題と双対問題の組として書けることを示し，両者の最適値として極限荷重係数が得られることを説明する．

下界定理（定理 1）より，次の最適化問題の最適値は極限荷重係数 λ^* の下界である：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \lambda \\ \text{subject to} & B^\top \boldsymbol{q} = \lambda \boldsymbol{p}, \\ & -R_i \leq q_i \leq R_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{array}\right\} \tag{11}$$

[6]最適化問題の最適解における目的関数の値のことを，最適値とよぶ．

一方，上界定理（定理 2）より不等式

$$\lambda^* \leq \min_{\boldsymbol{u}} \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} R_i |e_i(\boldsymbol{u})|}{\boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{u}} \;\middle|\; \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{u} > 0 \right\} \tag{12}$$

が成り立つ（(12) の右辺は，上界定理により得られる λ_{k} の最小値である）．(4) より，任意の $\alpha > 0$ に対して

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} R_i |e_i(\alpha\boldsymbol{u})|}{\boldsymbol{p}^\top (\alpha\boldsymbol{u})} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} R_i |e_i(\boldsymbol{u})|}{\boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{u}}$$

が成り立つ．従って，(12) の右辺の最小化ではたとえば $\boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{u} = 1$ を満たす $\boldsymbol{u}$ に限定しても最適値はかわらない．つまり，(12) の右辺は次の最適化問題の最適値として得られる：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} R_i |e_i| \\ \text{subject to} & e_i = \boldsymbol{b}_i^\top \boldsymbol{u}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{u} = 1. \end{array}\right\} \tag{13}$$

問題 (11) の最適値を $\underline{\lambda}$ で表し，問題 (13) の最適値を $\overline{\lambda}$ で表すと，下界定理と上界定理は

$$\underline{\lambda} \leq \lambda^* \leq \overline{\lambda} \tag{14}$$

が成り立つことを（直観的に）述べている．線形計画の双対性を用いると，(14) の二つの不等号は等号で成立することがわかる．以下では，このことを説明する．

まず，問題 (13) を問題 (8) の形式に変換する．そのために，新たな変数 $\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{u}^- \in \mathbb{R}^d$ を導入して変数 $\boldsymbol{u}$ を

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-, \quad \boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{u}^- \geq \boldsymbol{0} \tag{15}$$

と分解する．同様に，変数 e_i を

$$e_i = e_i^+ - e_i^-, \quad e_i^+, e_i^- \geq 0 \tag{16}$$

と分解する．いま，$R_i > 0$ より，制約 (16) の下で $R_i(e_i^+ + e_i^-)$ を最小化すると $R_i|e_i|$ に等しくなる．このことに注意して，(15) および (16) を用いて問題 (13) の $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{e}$ を消去すると次のようになる：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \boldsymbol{R}^\top (\boldsymbol{e}^+ + \boldsymbol{e}^-) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{e}^+ - \boldsymbol{e}^- = B(\boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-), \\ & \boldsymbol{p}^\top (\boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-) = 1, \\ & \boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{u}^-, \boldsymbol{e}^+, \boldsymbol{e}^- \geq \boldsymbol{0}. \end{array}\right\} \tag{17}$$

これは，等式標準形 (8) の形式である．つまり，問題 (17) は

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Minimize} & \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \hline \boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{R}\end{bmatrix}^{\top}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{+}\\ \boldsymbol{u}^{-}\\ \hline \boldsymbol{e}^{+}\\ \boldsymbol{e}^{-}\end{bmatrix}\\ \text{subject to} & \left[\begin{array}{cc|cc}-B & B & I & -I\\ \boldsymbol{p}^{\top} & -\boldsymbol{p}^{\top} & O & O\end{array}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{+}\\ \boldsymbol{u}^{-}\\ \hline \boldsymbol{e}^{+}\\ \boldsymbol{e}^{-}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{+}\\ \boldsymbol{u}^{-}\\ \hline \boldsymbol{e}^{+}\\ \boldsymbol{e}^{-}\end{bmatrix}\geq\mathbf{0}\end{array}\right\} \tag{18}$$

という形をしているので，等式標準形 (8) において

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc}-B & B & I & -I\\ \boldsymbol{p}^{\top} & -\boldsymbol{p}^{\top} & O & O\end{array}\right],\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \hline \boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{R}\end{bmatrix}^{\top},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{+}\\ \boldsymbol{u}^{-}\\ \hline \boldsymbol{e}^{+}\\ \boldsymbol{e}^{-}\end{bmatrix} \tag{19}$$

とおいた場合に相当することがわかる．

次に，(19) の対応関係を用いて双対問題 (9) を書き下す．(19) の行列 A のサイズが $(m+1)\times 2(m+d)$ であることから，双対問題の変数を

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}\\ \hline \lambda\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^{m},\quad \lambda\in\mathbb{R} \tag{20}$$

とおくことにする．すると，問題 (9) は

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Maximize} & \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \hline 1\end{bmatrix}^{\top}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}\\ \hline \lambda\end{bmatrix}\\ \text{subject to} & \left[\begin{array}{c|c}-B^{\top} & \boldsymbol{p}\\ B^{\top} & -\boldsymbol{p}\\ \hline I & O\\ -I & O\end{array}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}\\ \hline \lambda\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \hline \boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{R}\end{bmatrix}\end{array}\right\} \tag{21}$$

と書き下せる．これはつまり

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Maximize} & \lambda\\ \text{subject to} & -B^{\top}\boldsymbol{q}+\lambda\boldsymbol{p}\leq 0,\\ & B^{\top}\boldsymbol{q}-\lambda\boldsymbol{p}\leq 0,\\ & \boldsymbol{q}\leq\boldsymbol{R},\\ & -\boldsymbol{q}\leq\boldsymbol{R}\end{array}\right\}$$

という問題であり，この問題を整理すると問題 (11) と一致することがわかる．

以上により，問題 (18) と問題 (21) は，線形計画の主問題と双対問題の組であることが明らかになった．また，両者には実行可能解が存在する[7]．従って，定理 4 より，両者の最適値は一致する．つまり，

[7] 条件 $\boldsymbol{p}^{\top}\boldsymbol{u}=1$ を満たす任意の $\boldsymbol{u}$ に対して，(15) により $\boldsymbol{u}^{+}$ および $\boldsymbol{u}^{-}$ を決める．次に，$\boldsymbol{e}=B\boldsymbol{u}$ とおき，(16) に従って $\boldsymbol{e}^{+}$ および $\boldsymbol{e}^{-}$ を決める．こうして得られる $\boldsymbol{u}^{+}$, $\boldsymbol{u}^{-}$, $\boldsymbol{e}^{+}$, $\boldsymbol{e}^{-}$ は問題 (18) の実行可能解である．また，たとえば $\boldsymbol{q}=\mathbf{0}$, $\lambda=0$ は問題 (21) の実行可能解である．

(14) の二つの不等式は等号で成立する．この事実により，極限荷重係数は一意的に存在し，下界定理や上界定理を用いてその値が得られることが保証される．

次に，問題 (18) と問題 (21) の最適性条件について考察する．定理 5 より，最適性条件は，(10) において $A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を (19) および (20) とした場合に相当する．いま，条件 (10a) および (10b) は問題 (18) の制約そのものである．また，条件 (10c) は問題 (21) の制約そのものである．(10d) を書き下すと

$$u_j^+(B^\top \boldsymbol{q} - \lambda \boldsymbol{p})_j = 0, \quad j = 1, \dots, d, \tag{22}$$

$$u_j^-(-B^\top \boldsymbol{q} + \lambda \boldsymbol{p})_j = 0, \quad j = 1, \dots, d, \tag{23}$$

$$e_i^+(R_i - q_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{24}$$

$$e_i^-(R_i + q_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m \tag{25}$$

であるが，(22) および (23) は問題 (21) の等式制約から冗長な条件であることがわかる．以上をまとめ，さらに物理的な意味を明確にするために (15) を用いて変数 $\boldsymbol{u}^+, \boldsymbol{u}^-$ を変数 $\boldsymbol{u}$ に戻すと，次の条件が得られる：

$$\boldsymbol{e}^+ - \boldsymbol{e}^- = B\boldsymbol{u}, \tag{26a}$$

$$\boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{u} = 1, \tag{26b}$$

$$B^\top \boldsymbol{q} = \lambda \boldsymbol{p}, \tag{26c}$$

$$-R_i \le q_i \le R_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{26d}$$

$$e_i^+(R_i - q_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{26e}$$

$$e_i^-(R_i + q_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{26f}$$

$$e_i^+ \ge 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{26g}$$

$$e_i^- \ge 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{26h}$$

これが，問題 (18) と問題 (21) の最適性条件である．

条件 (26d), (26e), (26g) より，

$$\begin{aligned} e_i^+ > 0 \quad &\Rightarrow \quad q_i = R_i, \\ q_i < R_i \quad &\Rightarrow \quad e_i^+ = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．つまり,「部材 i に正の伸びが生じるならば，軸力は R_i に等しい」,「部材 i の軸力が R_i より小さいならば，伸びは 0 以下である」が成り立つ．同様に，(26d), (26f), (26h) より，

$$\begin{aligned} e_i^- > 0 \quad &\Rightarrow \quad q_i = -R_i, \\ q_i > -R_i \quad &\Rightarrow \quad e_i^- = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．つまり,「部材 i に負の伸びが生じるならば，軸力は $-R_i$ に等しい」,「部材 i の軸力が $-R_i$ より大きいならば，伸びは 0 以上である」が成り立つ．以上の考察から，条件 (26d), (26e), (26f), (26g), (26h) は（$e_i = e_i^+ - e_i^-$ に注意すると）図 1 の構成則を表していることがわかる．

このようにして，問題 (18) と問題 (21) の最適解では，適合条件 (26a)，力の釣合い (26b)，構成則 (26d)–(26h) という力学的に要請される条件がすべて満たされることがわかる[8]．このように，一見す

[8]条件 (26c) は節点変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ の大きさを正規化するためのものと考えればよい．

ると (26) は線形計画の最適性条件として形式的に得られたに過ぎないようにも思えるが，実は，この条件は力学的に極めて自然な形で解釈することができる．そしてその条件が極限解析で用いられる原理に理論的な正当性を与えていることが，最適化によるモデリングの奥深いところである．

参考文献

[1] A. Charnes, C. E. Lemke, O. C. Zienkiewicz: Virtual work, linear programming and plastic limit analysis. *Proceedings of the Royal Society, A*, **251**, 110–116 (1959).

[2] W. S. Dorn, H. J. Greenberg: Linear programming and plastic limit analysis of structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, **15**, 155–167 (1957).

[3] D. C. Drucker, H. J. Greenberg, W. Prager: The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain. *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, **18**, 371–378 (1951).

[4] D. C. Drucker, W. Prager, H. J. Greenberg: Extended limit design theorems for continuous media. *Quarterly of Applied Mathematics*, **9**, 381–389 (1952).

[5] A. A. Gvozdev: The determination of the value of the collapse load for statically indeterminate systems undergoing plastic deformation. *International Journal of Mechanical Sciences*, **1**, 322–335 (1960). First published in *Proceedings of the Conference on Plastic Deformations*, December 1936.

[6] M. R. Horne: Fundamental propositions in the plastic theory of structures. *Journal of Institution of Civil Engineers*, **34**, 174–177 (1950).

[7] M. Jirásek, Z. P. Bažant: *Inelastic Analysis of Structures.* John Wiley & Sons, Chichester (2002).

[8] G. Maier: Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and nonassociated flow-laws: a finite element, linear programming approach. *Meccanica*, **4**, 250–260 (1969).

[9] J. Matoušek, B. Gärtner: *Understanding and Using Linear Programming.* Springer-Verlag, Berlin (2007).

[10] 中村 恒善（編）：建築構造力学 図説・演習 II（第 2 版），丸善 (1994).

[11] 大崎 純，本間 俊雄：『例題で学ぶ建築構造力学 2：不静定構造力学編』．コロナ社 (2013).

[12] 田村 明久，村松 正和：『最適化法』．共立出版 (2002).

（2017 年 4 月, 寒野）