塑性論

塑性論のさまざまな概念は，凸解析 [3, 5, 6] と密接なつながりがあることが，古くから知られている [2, 4]．

1．凸解析の基礎

関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対し，集合

$$\mathrm{dom}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) < +\infty\}$$

を f の実効定義域とよぶ．凸とは限らないが $\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$ を満たす関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して

$$f^*(\boldsymbol{s}) = \sup\{\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

で定義される関数 $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を f の共役関数とよぶ．

関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して，グラフ $Y = f(\boldsymbol{x})$ の上側の部分を f のエピグラフとよび，記号

$$\mathrm{epi}\, f = \{(\boldsymbol{x}, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid Y \geq f(\boldsymbol{x})\}$$

で表す．f が凸関数であることは，$\mathrm{epi}\, f$ が凸集合であることと等価である．特に，$\mathrm{epi}\, f$ が空でない閉凸集合であるとき，f は閉真凸関数であるという．

集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して

$$\delta_C(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \boldsymbol{x} \in C, \\ +\infty & \text{if } \boldsymbol{x} \notin C \end{cases}$$

で定義される関数 $\delta_C : \mathbb{R}^n \to \{0, +\infty\}$ を C の標示関数とよぶ．C が凸集合であることは，δ_C が凸関数であることと等価である．

凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ と点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して，集合

$$\partial f(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \rangle \ (\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n)\} \tag{1}$$

を f の $\boldsymbol{x}$ における劣微分とよぶ．また，劣微分の要素（元）のことを劣勾配とよぶ．f が点 $\boldsymbol{x}$ において微分可能な場合には，$\partial f(\boldsymbol{x}) = \{\nabla f(\boldsymbol{x})\}$ が成り立つ．

凸関数の共役関数と劣微分との間には，次の関係がある．

定理 1． 閉真凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を考える．点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ に対して次の三つの条件は互いに等価である[1]．

(a) $\boldsymbol{s} \in \partial f(\boldsymbol{x})$.

(b) $f(\boldsymbol{x}) + f^*(\boldsymbol{s}) = \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{x} \rangle$.

(c) $\boldsymbol{x} \in \partial f^*(\boldsymbol{s})$. ■

[1] 文献 [3, 定理 2.52] や文献 [6, Theorem 23.5] を参照のこと．

集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して，その標示関数 δ_C の共役関数

$$\delta_C^*(\boldsymbol{s}) = \sup\{\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in C\} \tag{2}$$

を C の支持関数とよぶ．支持関数は，任意の $\lambda > 0$ と $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ に対して条件

$$\delta_C^*(\lambda \boldsymbol{s}) = \lambda \delta_C^*(\boldsymbol{s})$$

を満たす．このような性質をもつ関数を，正斉次関数とよぶ．一般に，δ_C^* は正斉次な閉真凸関数である．C が有界であることと，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ において $\delta_C^*(\boldsymbol{x})$ が有限の値をとることとは等価である[2]．

関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が正斉次真凸関数であることと，$\operatorname{epi} f$ が空でない凸錐であることは等価である[3]．また，$\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ を満たす関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が正斉次真凸関数であることの必要十分条件は，

$$f(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) \leq \lambda_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2 f(\boldsymbol{x}_2), \quad \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0 \tag{3}$$

が成り立つことである[4]．(3) の不等号が常に等号で成り立つとき，f は線形関数である．つまり，正斉次真凸関数は線形関数を一般化した概念であるといえる．

正斉次閉真凸関数と，空でない閉凸集合の間には，一対一対応がある．実際，正斉次閉真凸関数 g は集合

$$C_g = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{s} \leq g(\boldsymbol{s})\ (\forall \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n)\} \tag{4}$$

の支持関数である[5]．

原点を含む閉凸集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して

$$\gamma_C(\boldsymbol{x}) = \inf\{\mu > 0 \mid \boldsymbol{x} \in \mu C\}$$

で定義される関数 $\gamma_C : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ を C のゲージとよぶ．ただし，$\mu C = \{\mu \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in C\}$ である．γ_C は正斉次真凸関数である[6]．また，$\gamma_C(\boldsymbol{x}) < +\infty$ $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ が成り立つことと $\boldsymbol{0} \in \operatorname{int} C$ は等価である．さらに，

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \gamma_C(\boldsymbol{x}) \leq 1\} = C$$

が成り立つ．C がコンパクトであることは，$\boldsymbol{0}$ でない任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\gamma_C(\boldsymbol{x}) > 0$ が成り立つことと等価である[7]．

原点を含む閉凸集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して，C の極集合を

$$C^\circ = \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} \leq 1\ (\forall \boldsymbol{x} \in C)\}$$

で定義する．C のゲージは C° の支持関数である[8]：

$$\gamma_C = \delta_{C^\circ}^*. \tag{5}$$

[2] [5, Proposition V.2.1.3].
[3] [5, Proposition V.1.1.3].
[4] [5, Proposition V.1.1.4].
[5] [5, Theorem V.3.1.1].
[6] [5, Theorem V.1.2.5].
[7] [5, Corollary V.1.2.6].
[8] [5, Proposition V.3.2.4].

また，C の支持関数は C° のゲージである：

$$\delta_C^* = \gamma_{C^\circ}. \tag{6}$$

空でない凸集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ と点 $\boldsymbol{x} \in C$ に対して，点 $\boldsymbol{x}$ における C の法線錐[9]とは

$$N_C(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{s}^\top(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \leq 0 \ (\forall \boldsymbol{y} \in C)\}$$

で定義される集合のことである．$C \subseteq \mathbb{R}^n$ を空でない閉凸集合とすると，定義より，

$$\boldsymbol{x} \in \operatorname{int} C \quad \Rightarrow \quad N_C(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{0}\} \tag{7}$$

が成り立つ．また，法線錐と支持関数の間には

$$\boldsymbol{s} \in N_C(\boldsymbol{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} = \delta_C^*(\boldsymbol{s}) \tag{8}$$

という関係がある[10].

次の定理は，法線錐と劣微分の関係を述べている．

定理 2. 閉凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して，点 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ が f の最小解ではないと仮定する．また，集合 C を $C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \leq f(\bar{\boldsymbol{x}})\}$ で定義する．このとき，$\boldsymbol{s} \in N_C(\bar{\boldsymbol{x}})$ が成り立つ必要十分条件は，$\lambda > 0$ が存在して $\boldsymbol{s} \in \lambda \partial f(\bar{\boldsymbol{x}})$ が成り立つことである[11]. ■

集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ の境界を $\operatorname{bd} C$ で表し，内部を $\operatorname{int} C$ で表す．集合 C と点 $\boldsymbol{x}_0 \in \operatorname{bd} C$ に対して，条件

$$\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}_0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in C$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき，超平面

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}_0\}$$

を $\boldsymbol{x}_0$ における C の支持超平面という．

定理 3. 空でない凸集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ は，任意の点 $\boldsymbol{x} \in \operatorname{bd} C$ において支持超平面をもつ[12]. ■

定理 4. $C \subset \mathbb{R}^n$ を内点をもつ閉集合とする．任意の点 $\boldsymbol{x} \in \operatorname{bd} C$ における C の支持超平面が存在するならば，C は凸集合である[13]. ■

---

[9]法錐とよばれることもある．

[10]$\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$ に対して

$$\mathrm{F}_C(\boldsymbol{d}) = \{\boldsymbol{s} \in C \mid \boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{d} = \delta_C^*(\boldsymbol{d})\} \tag{9}$$

で定義される集合 $\mathrm{F}_C(\boldsymbol{d}) \subseteq C$ を $\boldsymbol{d}$ による C の暴露面 (exposed face) とよぶ．C が空でない閉凸集合であるとき，

$$\boldsymbol{s} \in \mathrm{F}_C(\boldsymbol{d}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{d} \in N_C(\boldsymbol{s}) \tag{10}$$

が成り立つ [5, Proposition V.3.1.4]．(9) と (10) より (8) が得られる．

[11][6, Corollary 23.7.1].

[12]たとえば文献 [1, section 2.5.2] を参照のこと．

[13]文献 [1, exercise 2.27] を参照のこと．

2. 最大塑性仕事の原理とその帰結

この節の内容の多くは，文献 [4, section 4.2] に基づく．

2 階の 3 次元対称テンソルの集合を $\mathcal{S}^3$ で表す[14]．応力 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}^3$ がある条件を満たすと塑性変形が生じる．その条件により，応力が存在し得る領域が規定される．応力が取りうる値の集合を $K \subseteq \mathcal{S}^3$ で表す．簡単のため，以下では完全塑性を考える．つまり，塑性ひずみが生じても K は変化しないものとする．

集合 K の境界 $\mathrm{bd}\, K$ を降伏曲面とよぶ．また，K の内部 $\mathrm{int}\, K$ を弾性域とよぶ．以下では，K は $\boldsymbol{o} \in \mathrm{int}\, K$ を満たす閉集合であることを仮定する．

最大塑性仕事の原理は，応力 $\boldsymbol{\sigma}$ と塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{p}}$ の間に条件

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{p}} \geq \check{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{p}}, \quad \forall \check{\boldsymbol{\sigma}} \in K \tag{11}$$

が成り立つという仮定である．(11) は，次のように書くこともできる：

$$\boldsymbol{\sigma} \in \arg\max\{\check{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{p}} \mid \check{\boldsymbol{\sigma}} \in K\}. \tag{12}$$

K は原点を含むと仮定しているので，(11) において $\check{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{o}$ と選ぶと

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{p}} \geq 0 \tag{13}$$

が得られる．つまり，塑性仕事率は常に非負である．(13) を，散逸不等式 (dissipation inequality) とよぶ．

2.1. 凸性

任意の塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{S}^3$ に対して条件 (12) を満たす応力 $\boldsymbol{\sigma} \in K$ が存在するためには，たとえば K がコンパクト集合であることを仮定すれば十分である．一方，任意の $\boldsymbol{\sigma} \in K$ に対して条件 (12) を満たす $\dot{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{S}^3$ が存在するためには，K の凸性を仮定する必要がある．

定理 5. K は内点をもつ閉集合であることを仮定する．任意の $\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{bd}\, K$ に対して条件 (12) を満たす塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{S}^3$ が存在するための必要十分条件は，K が凸であることである． ■

証明. $\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{bd}\, K$ に対して条件 (12) を満たす塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{S}^3$ が存在することは，$\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{bd}\, K$ における K の支持超平面が存在することと同値である．定理 3 より，K が凸ならば任意の $\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{bd}\, K$ において支持超平面が存在する．一方，定理 4 より，任意の $\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{bd}\, K$ において K の支持超平面が存在するならば K は凸である． □

以下では，K はコンパクトな凸集合であり原点を内点として含むことを仮定する[15]．

2.2. 降伏関数

K は，そのゲージ

$$\gamma_K(\boldsymbol{\sigma}) = \inf\{\mu \geq 0 \mid \boldsymbol{\sigma} \in \mu K\} \tag{14}$$

を用いて

$$K = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}^3 \mid \gamma_K(\boldsymbol{\sigma}) \leq 1\}$$

[14] 以下では直交デカルト座標系のみを考えるので，2 階テンソルの集合は対応する次数の正方行列の集合と同一視できる．
[15] これは帰結ではなく仮定である．

と表される．K のゲージ γ_K を用いて定義される関数

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}) = \gamma_K(\boldsymbol{\sigma}) - 1 \tag{15}$$

のことを，降伏関数とよぶ．定義より，

$$K = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}^3 \mid \phi(\boldsymbol{\sigma}) \le 0\}$$

が成り立つ．閉凸集合 K が有界で $\boldsymbol{o} \in \operatorname{int} K$ を満たすという条件は，K に対応する降伏関数 ϕ が条件

$$\begin{aligned} &\phi(\boldsymbol{\sigma}) < +\infty, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}^3, \\ &\phi(\boldsymbol{\sigma}) > -1, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}^3 \setminus \{\boldsymbol{o}\} \end{aligned}$$

を満たすことと等価である．

2.3. 最適性条件

塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{S}^3$ が与えられたとき，(12) の右辺は

$$\underset{\sigma \in \mathcal{S}^3}{\text{Maximize}} \quad \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{p}} - \delta_K(\boldsymbol{\sigma}) \tag{16}$$

という最適化問題として書ける．問題 (16) の最適値は K の支持関数

$$\delta_K^*(\dot{\boldsymbol{p}}) = \sup\{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{p}} - \delta_K(\boldsymbol{\sigma}) \mid \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}^3\} \tag{17}$$

で与えられる．この δ_K^* のことを，塑性論では散逸関数 (dissipation function) とよぶ．散逸関数の値 $\delta_K^*(\dot{\boldsymbol{p}})$ は，塑性仕事率を表す．支持関数の性質 (8) より，$\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}^3$ が (16) の最適解であることと

$$\dot{\boldsymbol{p}} \in N_K(\boldsymbol{\sigma}) \tag{18}$$

が成り立つことは等価である．(18) と法線錐の性質 (7) より，

$$\boldsymbol{\sigma} \in \operatorname{int} K \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{o}$$

が成り立つ．つまり，応力が弾性域にあるならば，塑性ひずみ速度はゼロである（つまり，弾性変形のみが可能である）．

問題 (16) の最適性条件は，δ_K および δ_K^* の定義より

$$\delta_K(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{p}} = \delta_K^*(\dot{\boldsymbol{p}}) \tag{19}$$

とも書ける．定理 1 より，(19) は条件

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial \delta_K^*(\dot{\boldsymbol{p}}) \tag{20}$$

と等価であり，条件

$$\dot{\boldsymbol{p}} \in \partial \delta_K(\boldsymbol{\sigma}) \tag{21}$$

とも等価である．

以上で，最大塑性仕事の原理 (12) と等価な条件として

$$(12) \quad \Leftrightarrow \quad (18) \quad \Leftrightarrow \quad (21) \quad \Leftrightarrow \quad (20)$$

が導かれた．(18) は，法線則に相当する条件である（2.5 節を参照のこと）．(20) は応力を塑性ひずみ速度の（集合値）関数として表しているという意味で，塑性論における構成則の表現とみなせる．(21) はその逆関数による表現を与えている．

例 6 (トラス要素)**.** トラス要素の軸力を q として，K を

$$K = \{q \in \mathbb{R} \mid |q| \leq R\}$$

で定義する．ただし，R は降伏軸力である．K のゲージは

$$\gamma_K(q) = \frac{1}{R}|q|$$

であり，降伏関数は

$$\phi(q) = \frac{1}{R}|q| - 1$$

となる（従って，$\phi(q) \leq 0$ は $|q|/R \leq 1$ と等価である）．K の極集合は

$$\begin{aligned} K^\circ &= \{\dot{p} \in \mathbb{R} \mid \dot{p}q \leq 1 \ (\forall q \in K)\} \\ &= \{\dot{p} \in \mathbb{R} \mid |p| \leq 1/R\} \end{aligned}$$

である．(6) より，散逸関数は

$$\delta_K^*(\dot{p}) = \gamma_{K^\circ}(\dot{p}) = R|\dot{p}|$$

である．$\partial\delta_K^*$ および $\partial\delta_K$ を具体的に求めることにより，(21) は

$$q \in \partial\delta_K^*(\dot{p}) = \begin{cases} -R & \text{if } \dot{p} < 0, \\ [-R, R] & \text{if } \dot{p} = 0, \\ R & \text{if } \dot{p} > 0 \end{cases}$$

と書け，(20) は

$$\dot{p} \in \partial\delta_K(q) = \begin{cases} [0, +\infty) & \text{if } q = R, \\ 0 & \text{if } |q| < R, \\ (-\infty, 0] & \text{if } q = -R, \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

と書ける． ■

2.4. 散逸関数の性質

(4) で示されるように，空でない閉凸集合と，正斉次閉真凸関数との間には一対一対応がある．そこで，集合 K に関する仮定は，散逸関数に関する仮定として述べることもできる．まず，K が有界

であることと任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\delta_K^*(\boldsymbol{x})$ が有限の値をとることとは等価である[16]．次に，$\boldsymbol{o} \in K$ ならば

$$\boldsymbol{o} : \dot{\boldsymbol{p}} - \delta_K(\boldsymbol{o}) = 0$$

が成り立つ．このことと散逸関数の定義 (17) から，$\boldsymbol{o} \in K$ であることと条件 $\delta_K^*(\dot{\boldsymbol{p}}) \geq 0$ $(\forall \dot{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{S}^3)$ が成り立つことは同値である．

従って,「K がコンパクトな凸集合で $\boldsymbol{o} \in \operatorname{int} K$ を満たす」に対応する仮定は,「散逸関数 d が正斉次閉真凸関数で条件

$$d(\dot{\boldsymbol{p}}) < +\infty, \quad \forall \dot{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{S}^3, \tag{22}$$

$$d(\dot{\boldsymbol{p}}) > 0, \qquad \forall \dot{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{S}^3 \setminus \{\boldsymbol{o}\} \tag{23}$$

を満たすこと」と言い換えることができる．(22) は，任意の塑性ひずみ速度に対して塑性仕事率が有限であることを意味している．また，(23) は，ゼロでない任意の塑性ひずみ速度に対して塑性仕事率が正の値をとることを意味している．

正斉次真凸関数は，そのエピグラフが空でない閉凸錐である関数として特徴づけられる．その他の特徴づけとして，次のものがある．$\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ を満たす関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が正斉次凸であるための必要十分条件は，f が

$$f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda > 0, \tag{24}$$

$$f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \leq f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2), \quad \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n \tag{25}$$

を満たすことである[17]．いま，(25) が等号で成立すれば，f は線形関数である．そこで，散逸関数が正斉次凸であることは，塑性仕事率に関する次の性質として言い換えることができる．まず，塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{p}}$ を $\lambda\ (> 0)$ 倍すると，塑性仕事率も λ 倍になる．次に，塑性ひずみ $\dot{\boldsymbol{p}}_1$ と $\dot{\boldsymbol{p}}_2$ がする塑性仕事率の和を考えると，塑性ひずみ $\dot{\boldsymbol{p}}_1 + \dot{\boldsymbol{p}}_2$ がする塑性仕事率より大きくなることはない．

ここで述べた散逸関数（塑性仕事率）に対する仮定は，最大塑性仕事の原理と K に関する仮定の帰結として得られるものであることに注意する．一方で，K に関する仮定は，最大塑性仕事の原理とここで述べた散逸関数（塑性仕事率）に対する仮定の帰結と捉えることもできる．

2.5. 法線則について

条件 (18) についてさらに考察する．

定理 2 において，$f = \gamma_K$ と考え，$\bar{\boldsymbol{x}}$ として $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \operatorname{bd} K$ を選ぶと，$C = K$ である．従って，$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \operatorname{bd} K$ のとき，条件

$$\dot{\boldsymbol{p}} \in N_K(\bar{\boldsymbol{\sigma}})$$

と条件

$$\exists \lambda > 0 : \quad \dot{\boldsymbol{p}} \in \lambda \partial \gamma_K(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \tag{26}$$

は等価である．(26) は，法線則に他ならない．

[16] [5, Proposition V.2.1.3].
[17] [5, Proposition V.1.1.4].

劣微分の定義より，(26) は

$$\lambda\gamma_K(\check{\boldsymbol{\sigma}}) \geq \lambda\gamma_K(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \dot{\boldsymbol{p}} : (\check{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}), \quad \forall\check{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{S}^3 \tag{27}$$

を満たす $\lambda > 0$ が存在することと等価である．(27) において $\check{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{o}$ と選び，$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \operatorname{bd} K$ より $\gamma_K(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = 1$ が成り立つことを用いると

$$0 \geq \lambda - \dot{\boldsymbol{p}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{28}$$

が得られる．また，(27) において $\check{\boldsymbol{\sigma}} = 2\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ と選ぶと，γ_K は正斉次関数であるから

$$2\lambda\gamma_K(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \geq \lambda + \dot{\boldsymbol{p}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{29}$$

が得られる．(28) と (29) を用いると，

$$\lambda = \dot{\boldsymbol{p}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \delta_K^*(\dot{\boldsymbol{p}})$$

が成り立つことがわかる．以上より，(26) は

$$\dot{\boldsymbol{p}} \in \delta_K^*(\dot{\boldsymbol{p}})\partial\gamma_K(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \tag{30}$$

と書き直せることがわかる．(30) が法線則の完全な表現である．

2.6. 降伏関数（ゲージ）と散逸関数の関係

集合 K のゲージ γ_K は (14) で定義される．ここで (4) より

$$K = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}^3 \mid \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{p}} \leq \delta_K^*(\dot{\boldsymbol{p}}) \ (\forall\dot{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{S}^3)\}$$

が成り立つが，これを (14) に代入することで

$$\gamma_K(\boldsymbol{\sigma}) = \inf\{\mu > 0 \mid \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{p}} \leq \mu\delta_K^*(\dot{\boldsymbol{p}}) \ (\forall\dot{\boldsymbol{p}} \in \mathcal{S}^3)\}$$

が得られる．従って，$\gamma_K(\boldsymbol{\sigma})$ と $\delta_K^*(\dot{\boldsymbol{p}})$ の間には不等式

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{p}} \leq \gamma_K(\boldsymbol{\sigma})\delta_K^*(\dot{\boldsymbol{p}}), \quad \forall\boldsymbol{\sigma} \in \operatorname{dom}\gamma_K,\ \forall\dot{\boldsymbol{p}} \in \operatorname{dom}\delta_K^*$$

が成り立つ[18]．

参考文献

[1] S. Boyd, L. Vandenberghe: *Convex Optimization.* Cambridge University Press, Cambridge (2004).

[2] G. Duvaut, J. L. Lions: *Inequalities in Mechanics and Physics.* Springer-Verlag, Berlin (1976).

[3] 福島 雅夫 :『非線形最適化の基礎』. 朝倉書店 (2001).

[4] W. Han, B. D. Reddy: *Plasticity (2nd ed.).* Springer, New York (2013).

[5] J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal: *Convex Analysis and Minimization Algorithms. Volume I.* Springer-Verlag, Berlin (1993).

[6] R. T. Rockafellar: *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton (1970).

（2017 年 4 月, 寒野）

[18] 文献 [6, p. 129] を参照のこと．