建築数理設計特論 講義資料（平成 **29** 年度第 **2** クォーター）

正定値対称行列

実数を要素とする正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が

$$A^\top = A$$

を満たすとき，A は（n 次の）対称行列であるという．対称行列 A の固有値は実数である．

実正方行列 U で

$$U^\top U = I$$

（ただし，I は単位行列）を満たすものを直交行列という．n 次の実対称行列 A に対して直交行列 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在して，

$$Q^\top A Q = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \tag{1}$$

とできる．ただし，(1) の右辺は $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ を対角要素とする n 次の対角行列を表す：

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

ここで Q の列ベクトルを

$$Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \cdots & \boldsymbol{q}_n \end{array} \right]$$

とおくと，(1) は

$$A\boldsymbol{q}_j = \lambda_j \boldsymbol{q}_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

と表され，$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は A の固有値であり，$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_n$ はそれに対応する固有ベクトルである．

実対称行列 A が，$\boldsymbol{0}$ でない任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} > 0$ を満たすとき，A は正定値であるという．また，$-A$ が正定値であるとき，A は負定値であるという．A が正定値であるとき，$A \succ O$ と書く（不等式の右辺はゼロ行列である）．以下の四つの条件は互いに等価である：

(a) $A \succ O$（つまり，$\boldsymbol{0}$ でない任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} > 0$ が成り立つ）．

(b) A の固有値はすべて正である．

(c) ある直交行列 Q と対角要素がすべて正の対角行列 D を用いて，$A = QDQ^\top$ と書ける．

(d) $A = SS^\top$ を満たす正則行列 S が存在する．

ここで，正方行列 S が正則であるとは S の逆行列が存在することである．これは，条件 $\det S \neq 0$ と等価である．

例として，2 次の実対称行列の場合を考える．A を

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

とおく．このとき，

$$\operatorname{tr} A = a + c = \lambda_1 + \lambda_2,$$
$$\det A = ac - b^2 = \lambda_1 \lambda_2$$

である．従って，A が正定値であるための必要十分条件は，$a + c > 0$ および $ac - b^2 > 0$ が成り立つことである．

次に，実対称行列 A が，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} \geq 0$ を満たすとき，A は半正定値であるという．また，$-A$ が半正定値であるとき，A は半負定値であるという．A が半正定値であるとき，$A \succeq O$ と書く．以下の四つの条件は互いに等価である：

(a) $A \succeq O$（つまり，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x} \geq 0$ が成り立つ）．

(b) A の固有値はすべて非負である．

(c) ある直交行列 Q と対角要素がすべて非負の対角行列 D を用いて，$A = QDQ^\top$ と書ける．

(d) $A = SS^\top$ を満たす正方行列 S が存在する．

たとえば，行列 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\top$（$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ はベクトル）は，n 次の半正定値対称行列である．また，行列 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i \boldsymbol{b}_i^\top$（$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m \in \mathbb{R}^n$ は線形独立なベクトル）は，ランクが m の n 次半正定値対称行列である．

一般に，微小変形を仮定するとき，弾性構造物の剛性行列は半正定値対称行列である．また，安定な弾性構造物の剛性行列は正定値対称行列である．

演習問題

1) 正定値対称行列のすべての対角要素は正であることを示せ．

2) 対称行列

$$S = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline C^\top & B \end{array}\right]$$

が正定値ならば，A および B も正定値であることを示せ．

3) S を正則行列とする．A が正定値対称行列ならば，$S^\top A S$ も正定値であることを示せ．

4) A が正定値対称行列で，$\alpha > 0$ ならば，αA も正定値であることを示せ．

5) A, B が正定値対称行列ならば，$A + B$ も正定値であることを示せ．

6) A, B が正定値対称行列ならば，ブロック対角行列

$$S = \left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array}\right]$$

も正定値であることを示せ．

7) 対称行列

$$S = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline C^\top & B \end{array}\right]$$

において，A が正定値であることを仮定する．行列 $B - C^\top A^{-1} C$ を，S における A の Schur の補元とよぶ．S が正定値であるための必要十分条件は，$B - C^\top A^{-1} C$ が正定値であることを示せ（ヒント：等式

$$\left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline -C^\top A^{-1} & I \end{array}\right] S \left[\begin{array}{c|c} I & -CA \\ \hline O & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B - C^\top A^{-1} C \end{array}\right]$$

が成り立つことを用いる）．

参考文献

[1] R. A. Horn, C. R. Johnson: *Matrix Analysis (2nd ed.)*. Cambridge University Press, New York (2013).

[2] 室田 一雄，杉原 正顯 :『東京大学工学教程・線形代数 I』．丸善出版 (2015).

[3] G. ストラング（井上昭・訳） :『線形代数とその応用』．産業図書 (1978).

（2017 年 4 月，寒野）