

半正定値計画による最適設計

半正定値計画は凸最適化の一種であり，線形計画の自然な拡張とみなすことができる．組合せ最適化や種々の非線形最適化をはじめとして，制御，データマイニング，量子化学，機械学習などに多くの応用がある．また，線形計画の解法の一つである内点法が半正定値計画に対して拡張されており，多項式時間で最適解が得られることが示されている [2, 5, 8]．特に主双対内点法に基づく優れたソフトウェアがいくつも開発されており¹，大規模な半正定値計画も実用的な計算コストで解くことができる．このように，半正定値計画は高い問題記述能力と効率的な解法の両方をもつため，構造物の設計問題に対しても多くの応用が期待される最適化問題である．

1. 半正定値計画とは

n 次の実対称行列の集合を \mathcal{S}^n で表す．行列 $U, V \in \mathcal{S}^n$ の内積を $U \bullet V$ で表し，

$$U \bullet V = \text{tr}(U^T V) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij} V_{ij}$$

で定義する．また，行列 $X \in \mathcal{S}^n$ が半正定値であるとき， $X \succeq O$ と書く．

行列 $A_1, \dots, A_m, C \in \mathcal{S}^n$ およびベクトル $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ が与えられたとき，対称行列 $X \in \mathcal{S}^n$ を変数とする次の形の最適化問題を半正定値計画の等式標準形とよぶ：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Minimize} & C \bullet X \\ \text{subject to} & A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & X \succeq O. \end{array} \right\} \quad (1)$$

ここで，目的関数および等式制約は線形であり，半正定値制約 $X \succeq O$ のみが非線形である．集合 $\{X \in \mathcal{S}^n \mid X \succeq O\}$ は凸集合であるから，問題 (1) は凸最適化問題である．

問題 (1) に対して， $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ および $Z \in \mathcal{S}^n$ を変数とする最適化問題

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^m y_i A_i + Z = C, \\ & Z \succeq O \end{array} \right\} \quad (2)$$

を双対問題とよぶ．これに対して，もとの問題 (1) を主問題とよぶ．双対問題 (2) もまた半正定値計画問題である．実際，適当な変換を施すことで主問題 (1) の形式に変形することができる．

¹たとえば次のようなソフトウェアがある．

- SDPA (<http://sdpa.sourceforge.net/>)
- SDPT3 (<http://www.math.nus.edu.sg/~mattohkc/sdpt3.html>)
- SeDuMi (<http://sedumi.ie.lehigh.edu/>)
- MOSEK (<https://www.mosek.com/>)

問題 (2) の制約は実質的には

$$C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \succeq O \quad (3)$$

と表せるが、この形式の条件を線形行列不等式とよぶ。従って、問題 (2) は線形行列不等式の制約の下で線形の目的関数を最大化する問題とみることができる。さらに、複数の線形行列不等式

$$C^{(p)} - \sum_{i=1}^m y_i A_i^{(p)} \succeq O, \quad p = 1, \dots, r \quad (4)$$

を考えると、これはブロック対角行列の半正定値制約

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & O & \dots & O \\ O & C^{(2)} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & C^{(r)} \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^m y_i \begin{bmatrix} A_i^{(1)} & O & \dots & O \\ O & A_i^{(2)} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_i^{(r)} \end{bmatrix} \succeq O$$

に等価である。従って、(4) のような条件を制約とする場合も半正定値計画である。

2. 線形計画との関係

行列 A_1, \dots, A_m, C が全て対角行列である場合を考える。それぞれの対角項を並べたベクトルを $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{c}$ で表す（つまり、 $A_i = \text{diag}(\mathbf{a}_i)$, $C = \text{diag}(\mathbf{c})$ とする）と、(3) は線形不等式系

$$\mathbf{c} - \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{a}_i \geq \mathbf{0}$$

に等価である。従って、このときに問題 (2) は線形計画に帰着する。このように、半正定値計画は線形計画を特別な場合として含む、より広いクラスの最適化問題である。

3. 双対定理

主問題 (1) の制約を満たす $X \in \mathcal{S}^n$ を、この問題の実行可能解とよぶ。さらに実行可能解 X が正定値であるとき、内点実行可能解とよぶ。同様に、双対問題 (2) の制約を満たす変数の組 (\mathbf{y}, Z) をこの問題の実行可能解とよび、特に Z が正定値であるときに内点実行可能解とよぶ。

X および (\mathbf{y}, Z) を実行可能解とすると、主問題と双対問題の目的関数の間に

$$C \bullet X - \mathbf{b}^\top \mathbf{y} = C \bullet X - \sum_{i=1}^m (A_i \bullet X) y_i = X \bullet \left(C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \right) = X \bullet Z \geq 0$$

が成り立つ（弱双対性）。このことから、もし両者の目的関数値が一致すれば、 X および (\mathbf{y}, Z) は最適解である。次の双対定理は、この逆を保証するものである。

定理 1 (双対定理). 主問題 (1) と双対問題 (2) の双方に、内点実行可能解が存在することを仮定する。このとき、それぞれの問題に最適解が存在する。また、それぞれの問題の実行可能解が最適解であるための必要十分条件は、主問題と双対問題の目的関数値が一致することである。

ここで、 $X, Z \succeq O$ に対して、条件 $X \bullet Z = 0$ は条件 $XZ = O$ と等価である。従って、(定理 1 の仮定の下で) X および (\mathbf{y}, Z) が問題 (1) および問題 (2) の最適解であるための必要十分条件 (最適性条件) は、これらが

$$A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5a)$$

$$\sum_{i=1}^m y_i A_i + Z = C, \quad (5b)$$

$$X \succeq O, \quad Z \succeq O, \quad XZ = O \quad (5c)$$

を満たすことである。条件 (5) は、半正定値計画問題の代表的な解法である主双対内点法の基礎となるものである [8]。

4. 固有値制約をもつ構造最適化

半正定値計画は、制御、データ・マイニング、行列補完、量子化学などさまざまな分野に応用がある。以下では、固有値 (固有振動数) の制約の下でのトラス構造の最適設計問題が半正定値計画としてモデリングできることを説明する。

トラス構造の節点変位の自由度を d とおき、部材数を m とおく。また、剛性行列を $K \in \mathcal{S}^d$ 、質量行列を $M \in \mathcal{S}^d$ で表す。自由振動の固有値 (固有円振動数の 2 乗) ω_j は一般化固有値問題

$$K\phi_j = \omega_j M\phi_j, \quad j = 1, \dots, d \quad (6)$$

の固有値として定義される。トラスの部材断面積を並べてできるベクトルを $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^\top$ で表し、これを設計変数とする。剛性行列 K および質量行列 M は \mathbf{x} の関数であり、

$$K(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m x_i K_i, \quad (7)$$

$$M(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m x_i M_i + M_0 \quad (8)$$

の形で書ける。ただし、 $K_1, \dots, K_m, M_0, M_1, \dots, M_m \in \mathcal{S}^d$ はすべて定行列で半正定値である。また、 $x_i K_i$ および $x_i M_i$ ($i = 1, \dots, m$) は第 i 部材の部材剛性行列および部材質量行列であり、 M_0 は非構造質量の質量行列である。固有値問題 (6) の固有値のうち最小のものを $\omega_{\min}(\mathbf{x})$ で表し、その下限値を指定した最適化問題

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimize}} \quad \mathbf{d}^\top \mathbf{x} \quad (9a)$$

$$\text{subject to} \quad \omega_{\min}(\mathbf{x}) \geq \bar{\omega}, \quad (9b)$$

$$\mathbf{x} \geq \bar{\mathbf{x}} \quad (9c)$$

を考える。ただし、 $\bar{\omega} (> 0)$ および $\bar{\mathbf{x}} (\geq \mathbf{0})$ は ω_{\min} および \mathbf{x} の下限値として指定した値である。また、 $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)^\top$ は部材の変形前の長さを並べてできる定ベクトルである。

例 2. 行列

$$A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 + x_1 & x_2 \\ x_2 & 1 - x_1 \end{bmatrix}$$

の固有値は $1 \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ である。従って、最小固有値 $1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ は \mathbf{x} の凹関数であり、 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ において最大値をとる。この点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ において $A(\mathbf{x})$ の二つの固有値は重複（縮重）しており、最小固有値は微分可能ではない。振動数制約の下での最適設計問題では、しばしば重複により最小固有値が微分可能でなくなり、このことが問題を難しくしている。 ■

断面積の下限值 \bar{x}_i ($i = 1, \dots, m$) が正であるとする、質量行列 $M(\mathbf{x})$ は正定値である。従って、Rayleigh 商²に関する公式

$$\omega_{\min}(\mathbf{x}) = \min_{\phi \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\phi^\top K(\mathbf{x}) \phi}{\phi^\top M(\mathbf{x}) \phi}$$

を用いると、条件 $\omega_{\min}(\mathbf{x}) \geq \bar{\omega}$ は行列 $K(\mathbf{x}) - \bar{\omega}M(\mathbf{x})$ が半正定値であることに等価であることが分かる。従って、振動数制約の下での最適設計問題 (9) は次のように書き直せる：

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimize}} \quad \mathbf{d}^\top \mathbf{x} \quad (10a)$$

$$\text{subject to} \quad K(\mathbf{x}) - \bar{\omega}M(\mathbf{x}) \succeq O, \quad (10b)$$

$$\mathbf{x} \geq \bar{\mathbf{x}}. \quad (10c)$$

この問題は、 $K(\mathbf{x})$ および $M(\mathbf{x})$ が (7) および (8) で表せることから、半正定値計画である。

部材断面積の下限値を $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ とすると、図 1 に示すように最適解で断面積が 0 になった部材は取り除くことができ、最適設計の自由度が広がる。このような設定での最適設計のことを、しばしば、トポロジー最適化（または、位相最適化）とよぶ。これに対して、部材断面積の下限値を正の定数としたときの最適設計のことを寸法最適化とよぶ。トポロジー最適化は、しばしば、寸法最適化にはない困難点を伴う。実際、固有振動数の制約の下でトポロジー最適化を行う場合には、いくつかの部材の断面積が 0 になると $M(\mathbf{x})$ が正定値でなくなることがある（0 を固有値にもつ半正定値行列になることがある）ため、固有値問題 (6) の定義自体があいまいになる。そこで、部材の消失に伴って消失する節点の自由度を無視して、最小固有値（最小固有振動数）を定義しなおすことにする。つまり、実質的な最小固有値を

$$\omega_{\min}(\mathbf{x}) = \min_{\phi: M(\mathbf{x})\phi \neq \mathbf{0}} \frac{\phi^\top K(\mathbf{x}) \phi}{\phi^\top M(\mathbf{x}) \phi}$$

で定義する。実は、このように最小固有値を定義した場合にも、最適設計問題は問題 (10) に帰着できることが知られている [1]。半正定値計画としてのモデリングでは、最適解において $M(\mathbf{x})$ の最小固有値が 0 である場合やトラス構造の固有振動数が重複する場合でも、困難なく最適解を求めることができる³。

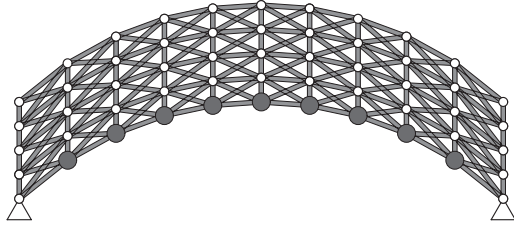
5. コンプライアンス最小化とロバスト最適化

トラス構造に作用する（静的な）外力ベクトルを $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$) で表す。4 節と同様に、部材断面積 \mathbf{x} を設計変数とする。

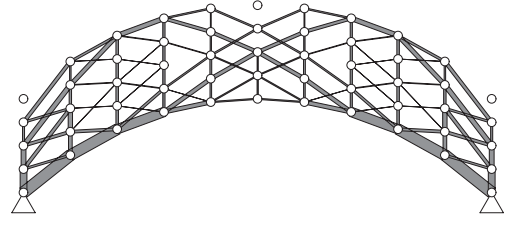
コンプライアンスは、構造物の静的な柔性の指標の一つである（コンプライアンスが小さいほど、構造物の剛性が大きいとみなせる）。部材の体積の総和の上限値を指定した下でコンプライアンスを最小化する設計変数を求める問題は、最も基本的な最適設計問題の一つである。

²Rayleigh–Ritz 商ともいう。たとえば文献 [7, Theorem 4.2.2] を参照のこと。

³詳しくは、文献 [9] を参照のこと。また、骨組構造への拡張には、文献 [10] がある。



(a) 初期設定



(b) 半正定値計画問題 (10) の最適解 ($\bar{x} = \mathbf{0}$ のとき)

図 1: 最小固有振動数の下限値を指定した構造物の最適設計

外力 \mathbf{p} が与えられたとき、コンプライアンスは設計変数 \mathbf{x} の関数として

$$\pi(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \sup\{2\mathbf{p}^\top \mathbf{u} - \mathbf{u}^\top K(\mathbf{x})\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d\} \quad (11)$$

で定義される。 $\mathbf{p} \in \text{Ker } K(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ ならば、釣合い式 $K(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{p}$ を満たす変位 \mathbf{u} は存在しない。このとき、定義 (11) より $\pi(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = +\infty$ である。また、 $\mathbf{p} \notin \text{Ker } K(\mathbf{x})$ ならば、釣合い式 $K(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{p}$ に解 $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$ が存在する。このとき、剛性行列 $K(\mathbf{x})$ が半正定値であることに注意すると、(11) の右辺は $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$ において最大値を達成し

$$\pi(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \mathbf{p}^\top \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^\top K(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{u}}$$

が成立する。以上をまとめると、外力 \mathbf{p} に対して釣合い状態が存在することはコンプライアンス $w(\mathbf{x}; \mathbf{p})$ が有限の値をとることに対応している。そして、釣合い状態が存在するときには、コンプライアンスはその釣合い状態に至るまでに外力がなす仕事に等しい。例として、外力が一つの節点のみに作用する場合には、コンプライアンスはその外力の方向の節点変位に比例する。従って、この場合にコンプライアンスを最小化することは、その外力の方向の節点変位を最小化することを意味している。

部材の変形前の長さ d_i を並べてできる定ベクトルを $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)^\top$ で表す。部材の体積の総和は $\mathbf{d}^\top \mathbf{x}$ と表される。このとき、コンプライアンス最小化問題は次のように定式化される：

$$\text{Minimize}_{\mathbf{x}} \quad \pi(\mathbf{x}; \mathbf{p}) \quad (12a)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{d}^\top \mathbf{x} \leq \bar{V}, \quad (12b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (12c)$$

ただし、 $\bar{V} (> 0)$ は部材体積の総和の上限値（指定値）である。

トラスのコンプライアンスは、凸性をはじめとする扱いやすい性質をもっている⁴。制約 (12b) および (12c) は線形不等式制約であるので、問題 (12) は凸最適化問題である。さらに、次に示す性質を用いると、問題 (12) を半正定値計画に帰着することができる。

定理 3. $\tau \in \mathbb{R}$ とする。次の二つの条件は同値である：

$$(a) \quad \tau \geq \pi(\mathbf{x}; \mathbf{p}).$$

$$(b) \quad \left[\begin{array}{c|c} \tau & \mathbf{p}^\top \\ \hline \mathbf{p} & K(\mathbf{x}) \end{array} \right] \succeq O.$$

⁴演習問題 1 および 2 を参照のこと

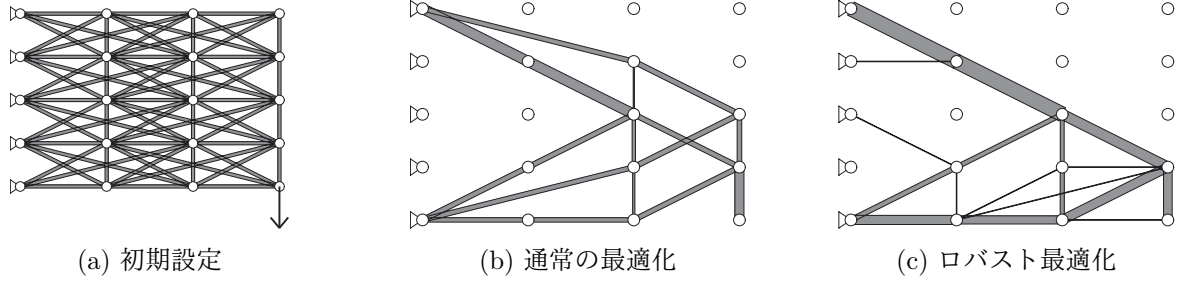


図 2: コンプライアンス最小化問題

証明. 条件 (a) は, 条件

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{u} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \tau & \mathbf{p}^\top \\ \mathbf{p} & K(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{u} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d) \quad (13)$$

と等価である. また, 条件 (b) は, 条件

$$\psi := \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \tau & \mathbf{p}^\top \\ \mathbf{p} & K(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}^d) \quad (14)$$

と等価である. 剛性行列 $K(\mathbf{x})$ は半正定値であるから, (14) で $\alpha = 0$ のとき

$$\psi = \beta^\top K(\mathbf{x}) \beta \geq 0 \quad (\forall \beta \in \mathbb{R}^d)$$

が得られる. 従って $\alpha \neq 0$ としてよく, このとき (14) は

$$\psi = \alpha^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -(-\beta/\alpha) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \tau & \mathbf{p}^\top \\ \mathbf{p} & K(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -(-\beta/\alpha) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}^d)$$

と書き直せるが, これは (13) と等価である. □

定理 3 を用いると, 問題 (12) は次の問題と等価であることがわかる :

$$\underset{\mathbf{x}, \tau}{\text{Minimize}} \quad \tau \quad (15a)$$

$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} \tau & \mathbf{p}^\top \\ \mathbf{p} & K(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \succeq O, \quad (15b)$$

$$\mathbf{d}^\top \mathbf{x} \leq \bar{V}, \quad (15c)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (15d)$$

剛性行列 $K(\mathbf{x})$ は (7) の形で与えられるので, 問題 (15) は半正定値計画である.

これまでの問題設定では, 外力 \mathbf{p} はあらかじめ与えられるデータであると想定していた. 現実には, 構造物に作用する外力を設計の段階で完全に予測することは不可能である. 現実のデータにはばらつき (不確実性) があることに着目した最適化手法に, ロバスト最適化とよばれる方法論がある [3]. ロバスト最適化では, 問題のデータのばらつき範囲を想定し, そのばらつきに対してロバスト性 (頑健性) をもつ解を求めるようなモデリングを行う. ロバスト最適化によって得られる解は, 問題のデー

タが想定した範囲内にある限りは制約を破ることもないし目的関数値が極端に悪化することもない。従って、ロバスト最適化は多くの不確実性を含む実世界の構造物の設計問題に対する有力な手法であると考えられる。以下では、コンプライアンス最小化問題において、外力 \mathbf{p} を不確実なデータとみなしたときのロバスト最適化について述べる。

ある不確かなパラメーターがばらつくとき、そのパラメーターがとり得ると想定した値すべてからなる集合のことを、不確実性集合とよぶ。外力 \mathbf{p} の不確実性集合として、楕円体

$$P = \{Q\mathbf{e} \mid \|\mathbf{e}\| \leq 1\} \quad (16)$$

を想定する。ここで、 $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^l$ は未知のパラメーター (l はそのパラメーターの数) であり、 $Q \in \mathbb{R}^{n \times l}$ は $\text{rank } Q = l$ を満たす定行列であるとする。

コンプライアンス最小化問題 (12) において、外力 \mathbf{p} が条件 $\mathbf{p} \in P$ をみたしながらばらつく想定する。このとき、目的関数のみが不確実性をもつ。ロバスト最適化では、目的関数が最悪の値をとるとき (これを最悪シナリオとよぶ) を考え、最悪シナリオにおける目的関数値が最もよくなる設計変数を求める。つまり、問題 (12) に対するロバスト最適化問題は次のように定式化される：

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimize}} \quad \sup\{\pi(\mathbf{x}; \mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in P\} \quad (17a)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{d}^\top \mathbf{x} \leq \bar{V}, \quad (17b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (17c)$$

いま、不確実性集合 P の要素は無限にあるため、(17a) では無限個の外力のパターンを考慮していることになる。一般にはこのような最適化問題を解くことは困難であるが、問題 (17) の場合には次に示す巧みな式変形を用いることで解きやすい形に帰着することができる。

定理 4 (Ben-Tal and Nemirovski [4]). $\tau \in \mathbb{R}$ とする。次の二つの条件は同値である：

$$(a) \quad \tau \geq \sup\{\pi(\mathbf{x}; \mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in P\}.$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} \tau I & Q^\top \\ Q & K(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \succeq O.$$

証明. (11) と (16) より、条件 (a) は具体的には

$$\tau - 2(Q\mathbf{e})^\top \mathbf{u} + \mathbf{u}^\top K(\mathbf{x})\mathbf{u} \geq 0 \quad (\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \forall \mathbf{e} : \|\mathbf{e}\| \leq 1) \quad (18)$$

と書ける。(18) の左辺は、 $\|\mathbf{e}\| = 1$ が成り立つときに最小値をとる。このことから、(18) は条件

$$\tau(\mathbf{e}^\top \mathbf{e}) - 2(Q\mathbf{e})^\top \mathbf{u} + \mathbf{u}^\top K(\mathbf{x})\mathbf{u} \geq 0 \quad (\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \forall \mathbf{e} : \|\mathbf{e}\| = 1)$$

と等価であることがわかる。これをさらに対称行列の2次形式として書き直すと

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ -\mathbf{u} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \tau I & Q^\top \\ Q & K(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ -\mathbf{u} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \forall \mathbf{e} : \|\mathbf{e}\| = 1)$$

となる。これは条件 (b) と等価である。 □

定理 4 より, 問題 (17) は次の問題と等価である :

$$\underset{\mathbf{x}, \tau}{\text{Minimize}} \quad \tau \quad (19a)$$

$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} \tau I & Q^\top \\ Q & K(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \succeq O, \quad (19b)$$

$$\mathbf{d}^\top \mathbf{x} \leq \bar{V}, \quad (19c)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (19d)$$

トラス構造の剛性行列 $K(\mathbf{x})$ は (7) の形であるので, (19b) は \mathbf{x} を変数とする線形行列不等式である. また, (19c) および (19d) は \mathbf{x} に関する線形不等式制約である. これらのことから, 問題 (19) は半正定値計画である⁵.

コンプライアンス最小化とそのロバスト最適化の解の例を, 図 2 に示す. 外力の不確実性を考慮したとき, ロバスト最適化問題の解は常に安定⁶になることを示すことができる.

6. 演習問題

- 1) 外力 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ が与えられたとき, 部材断面積 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ($\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$) をもつトラス構造のコンプライアンス $\pi(\mathbf{x}; \mathbf{p})$ は (11) で定義される. ただし, 剛性行列 $K(\mathbf{x})$ は, 半正定値対称な定行列 K_1, \dots, K_m を用いて (7) で与えられる. \mathbf{p} を固定したとき, $\pi(\mathbf{x}; \mathbf{p})$ は $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ の領域において (\mathbf{x} に関する) 凸関数である. このことを示せ.
- 2) トラス構造の部材の断面積を大きくすると, コンプライアンスは小さくなる⁷. つまり, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ が $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ を満たすとき, $\pi(\mathbf{x}; \mathbf{p}) \geq \pi(\mathbf{x} + \mathbf{y}; \mathbf{p})$ が成り立つ. このことを示せ.

参考文献

- [1] W. Achtziger, M. Kočvara: On the maximization of the fundamental eigenvalue in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **34**, 181–195 (2007).
- [2] M. F. Anjos, J. B. Lasserre (eds.): *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization*. Springer, New York (2012).
- [3] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, A. Nemirovski: *Robust Optimization*. Princeton University Press, Princeton (2009).
- [4] A. Ben-Tal, A. Nemirovski: Robust truss topology design via semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*, **7**, 991–1016 (1997).
- [5] A. Ben-Tal, A. Nemirovski: *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*. SIAM, Philadelphia (2001).

⁵ここではトラス構造に作用する外力が不確実性をもつ場合のロバスト最適設計問題を扱ったが, 節点位置が不確実性をもつ場合の考察には文献 [6] がある.

⁶“Kinematically determinate” の意味での「安定」である.

⁷厳密には「大きくなることはない」と述べる必要がある.

- [6] D. Hashimoto, Y. Kanno: A semidefinite programming approach to robust truss topology optimization under uncertainty in locations of nodes. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **51**, 439–461 (2015).
- [7] R. A. Horn, C. R. Johnson: *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [8] 小島 政和, 土谷 隆, 水野 眞治, 矢部 博 :『内点法』. 朝倉書店 (2001).
- [9] M. Ohsaki: *Optimization of Finite Dimensional Structures*. CRC Press, Boca Raton (2011).
- [10] S. Yamada, Y. Kanno: Relaxation approach to topology optimization of frame structure under frequency constraint. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **53**, 731–744 (2016).

(2017 年 4 月, 寒野)