

微小変形理論における剛性行列

平面トラス構造

平面トラス構造の剛性行列のつくり方を説明する。

まず、一本の部材に着目し、その両端の節点を i および j とする。図 1 のように、部材 (i, j) の材軸に沿って節点変位座標 $v_x^{(i)}$ および $v_x^{(j)}$ を定める。また、材軸と直交する方向に $v_y^{(i)}$ および $v_y^{(j)}$ を定める。部材の Young 率を E 、断面積を A 、変形前の長さを l とおくと、伸び剛性 k は

$$k = \frac{EA}{l}$$

で与えられる。



図 1: 平面トラス要素の要素座標系

微小変形理論では、各要素に生じるひずみを節点変位の原点の周りで線形関数として近似する。トラス要素におけるひずみ成分は、部材の伸びである。これを c で表すと、図 1 の場合には

$$c \simeq \left[-1 \quad 0 \mid 1 \quad 0 \right] \begin{bmatrix} v_x^{(i)} \\ v_y^{(i)} \\ v_x^{(j)} \\ v_y^{(j)} \end{bmatrix} = \mathbf{b}^\top \mathbf{v} \quad (1)$$

で与えられる。ただし、節点変位ベクトル \mathbf{v} および定ベクトル \mathbf{b} を

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x^{(i)} \\ v_y^{(i)} \\ v_x^{(j)} \\ v_y^{(j)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

で定義した。部材に蓄えられる弾性エネルギー w は、(1) を用いると

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} k c^2 \\ &= \frac{1}{2} k (\mathbf{b}^\top \mathbf{v})^2 \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top (k \mathbf{b} \mathbf{b}^\top) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2)$$

と表せる。行列 \hat{K} を

$$\begin{aligned} \hat{K} &:= k \mathbf{b} \mathbf{b}^\top \\ &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[-1 \quad 0 \mid 1 \quad 0 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

で定義すると、(2) は \hat{K} の 2 次形式 (に $1/2$ を乗じたもの) として表されていることがわかる。この \hat{K} は、図 1 に示す座標系においてトラス要素の剛性を表す行列である。

次に、トラス構造全体での剛性行列のつくり方を述べる。例として、図 2 のトラス構造を考える。節点番号を図 2(a) の $1, 2, \dots, 6$ のように定めるものとする。節点 5 および 6 はピン支持されており、節点 $1, \dots, 4$ は自由節点である。従って、このトラス構造の節点変位の自由度の数は 8 である。その節点変位の各成分を、たとえば図 2(a) の $u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, \dots, u_y^{(4)}$ のように定める。そして、これらを並べてできる節点変位ベクトルを

$$\mathbf{u} = \left[u_x^{(1)} \quad u_y^{(1)} \mid u_x^{(2)} \quad u_y^{(2)} \mid u_x^{(3)} \quad u_y^{(3)} \mid u_x^{(4)} \quad u_y^{(4)} \right]^T \in \mathbb{R}^8$$

で表す。このような座標系を、トラス構造に対する全体座標系とよぶ。

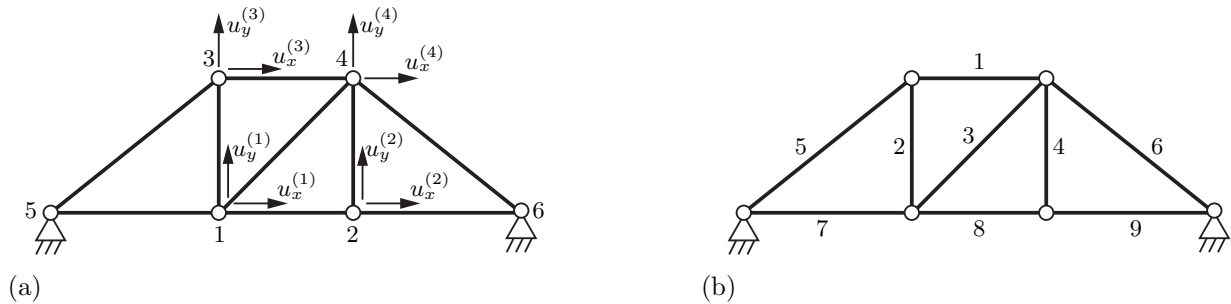


図 2: 平面トラス構造の (a) 節点番号と全体座標系, (b) 部材番号

各部材の剛性を表す行列で、全体座標系に対して定義されるものを、部材剛性行列 (または、要素剛性行列) という。すべての部材剛性行列を足し合わせることで、トラス構造の剛性行列が得られる。以下では、このことを説明する。

まず、全体座標系から要素座標系への座標変換を考える。部材番号を図 2(b) のように定めるとする。例として、節点 1 と 節点 4 を結ぶ部材 3 に着目する。つまり、図 3 において、 $e = 3, (i, j) = (1, 4)$ である。図 3(b) の座標系 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^8$ から図 3(a) の座標系 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ への座標変換は、定行列 $T_3 \in \mathbb{R}^{4 \times 8}$ を用いて

$$\mathbf{v} = T_3 \mathbf{u} \tag{4}$$

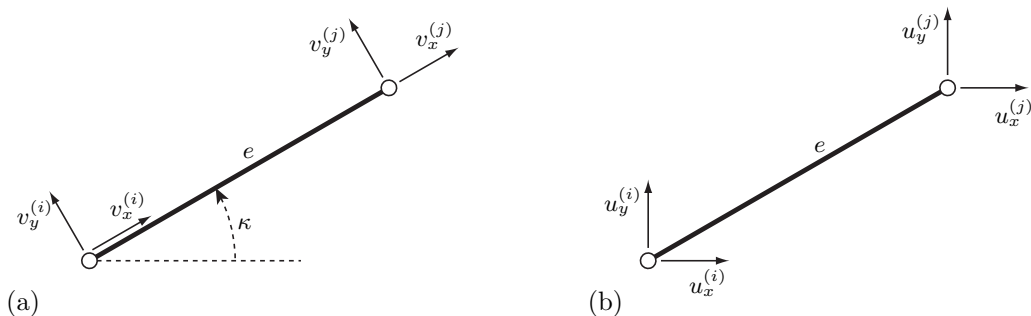


図 3: 平面トラス要素 e に対する (a) 要素座標系と (b) 全体座標系

と表すことができる。ここで T_3 は

$$T_3 = \begin{array}{cccccccc} u_x^{(1)} & u_y^{(1)} & u_x^{(2)} & u_x^{(2)} & u_x^{(3)} & u_y^{(3)} & u_x^{(4)} & u_x^{(4)} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left[\begin{array}{cc} \alpha_3 & \beta_3 \\ -\beta_3 & \alpha_3 \end{array} \right. & & & & & & \left. \begin{array}{cc} & & & & \alpha_3 & \beta_3 \\ & & & & -\beta_3 & \alpha_3 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \leftarrow v_x^{(1)} \\ \leftarrow v_y^{(1)} \\ \leftarrow v_x^{(4)} \\ \leftarrow v_y^{(4)} \end{array} \end{array}$$

で与えられ、 α_3 および β_3 は図 3(a) に示す角度 κ を用いて

$$\alpha_3 = \cos \kappa, \quad \beta_3 = \sin \kappa$$

で与えられる。(4) を (2) に代入することで、部材 3 に蓄えられるひずみエネルギー w_3 は \mathbf{u} の関数として

$$w_3 = \frac{1}{2} (\mathbf{T}_3 \mathbf{u})^\top (k_3 \mathbf{b} \mathbf{b}^\top) (\mathbf{T}_3 \mathbf{u}) \quad (5)$$

と表すことができる。ただし、

$$k_3 = \frac{EA_3}{l_3}$$

は部材 3 の伸び剛性である。定ベクトル $\tilde{\mathbf{b}}_3 \in \mathbb{R}^8$ を

$$\tilde{\mathbf{b}}_3 = \mathbf{T}_3^\top \mathbf{b} \quad (6)$$

で定義すると、(5) は

$$w_3 = \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top (k_3 \tilde{\mathbf{b}}_3 \tilde{\mathbf{b}}_3^\top) \mathbf{u} \quad (7)$$

と書き直すことができる。8 次の対称行列 K_3 を

$$K_3 = k_3 \tilde{\mathbf{b}}_3 \tilde{\mathbf{b}}_3^\top$$

で定義すると、(7) は K_3 の 2 次形式 (に 1/2 を乗じたもの) として表されていることがわかる。この K_3 を、全体座標系における部材 3 の部材剛性行列 (または、要素剛性行列) とよぶ。なお、 $\tilde{\mathbf{b}}_3$ および K_3 を成分で表すと

$$\tilde{\mathbf{b}}_3 = \begin{bmatrix} -\alpha_3 \\ -\beta_3 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad K_3 = \frac{EA_3}{l_3} \begin{bmatrix} \alpha_3^2 & \alpha_3 \beta_3 & & & -\alpha_3^2 & -\alpha_3 \beta_3 \\ \alpha_3 \beta_3 & \beta_3^2 & & & -\alpha_3 \beta_3 & -\beta_3^2 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ -\alpha_3^2 & -\alpha_3 \beta_3 & & & \alpha_3^2 & \alpha_3 \beta_3 \\ -\alpha_3 \beta_3 & -\beta_3^2 & & & \alpha_3 \beta_3 & \beta_3^2 \end{bmatrix}$$

である。

別の例として、部材 5 に着目する。つまり、図 3 において $e = 5, (i, j) = (5, 3)$ である。節点 $i = 5$ は支点（固定された節点）であるので、全体座標系から要素座標系への座標変換は、

$$T_5 = \begin{array}{cccccccc} & u_x^{(1)} & u_y^{(1)} & u_x^{(2)} & u_x^{(2)} & u_x^{(3)} & u_y^{(3)} & u_x^{(4)} & u_x^{(4)} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ T_5 = & \left[\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & \alpha_5 & \beta_5 & & \\ & & & & & -\beta_5 & \alpha_5 & & \\ & & & & & & & & \end{array} \right] & \begin{array}{l} \leftarrow v_x^{(5)} \\ \leftarrow v_y^{(5)} \\ \leftarrow v_x^{(3)} \\ \leftarrow v_y^{(3)} \end{array} \end{array}$$

で定められる定行列 $T_5 \in \mathbb{R}^{4 \times 8}$ を用いて

$$\mathbf{v} = T_5 \mathbf{u}$$

で表される。この T_5 を用いて、要素剛性行列 K_5 は

$$\tilde{\mathbf{b}}_5 = T_5^\top \mathbf{b}, \quad K_5 = k_5 \tilde{\mathbf{b}}_5^\top \tilde{\mathbf{b}}_5,$$

で与えられる。なお、 $\tilde{\mathbf{b}}_5$ および K_5 を成分で表すと

$$\tilde{\mathbf{b}}_5 = \begin{bmatrix} \alpha_5 \\ \beta_5 \end{bmatrix}, \quad K_5 = \frac{EA_5}{l_5} \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & \alpha_5^2 & \alpha_5 \beta_5 \\ & & \alpha_5 \beta_5 & \beta_5^2 \end{bmatrix}$$

である。

以上のようにして、図 2 のトラス構造を構成する部材 $1, \dots, 9$ のすべてに対する要素剛性行列 K_1, \dots, K_9 を求めることができる。そして、トラス構造全体の剛性行列は、各部材の要素剛性行列の和として

$$K = \sum_{e=1}^9 K_e \quad (8)$$

で与えられる。(8) の K は、全体剛性行列とよばれることもある。節点変位 \mathbf{u} が与えられたとき、トラス全体に蓄えられる弾性エネルギーは

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^\top K \mathbf{u} \quad (9)$$

で表される。各 K_e は、その定義から半正定値対称行列である。従って、それらの和として定義される全体の剛性行列 K も半正定値対称行列である。このことから、(9) で与えられる弾性エネルギーは任意の節点変位に大して非負であることがわかる。

再び図2のトラスの部材 $e = 3$ に着目する．全体座標系 \mathbf{u} から要素座標系 \mathbf{v} への座標変換は(4)で与えられていた．一方，部材の伸びは，要素座標系での節点変位 \mathbf{v} の関数として(1)で与えられていた．以下では，部材 e の伸びを c_e で表すことにする．部材 $e = 3$ の伸び c_3 と全体座標系における節点変位 \mathbf{u} との関係は，(1)と(4)から

$$c_3 = \mathbf{b}^\top T_3 \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{b}}_3^\top \mathbf{u} \quad (10)$$

と表すことができる．ただし， $\tilde{\mathbf{b}}_3$ の定義(6)を用いた．(10)の関係を，節点変位と部材3の伸びとの適合条件とよぶ．その他の部材についても，部材の伸び c_e は節点変位 \mathbf{u} の関数として

$$c_e = \tilde{\mathbf{b}}_e^\top \mathbf{u}, \quad e = 1, \dots, 9 \quad (11)$$

と表すことができる．そこで，ベクトル $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^9$ と定行列 $B \in \mathbb{R}^{9 \times 8}$ を

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^\top \\ \tilde{\mathbf{b}}_2^\top \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{b}}_9^\top \end{bmatrix}$$

で定義すると，トラス構造全体の適合条件(11)は

$$\mathbf{c} = B\mathbf{u}$$

と書くことができる．行列 B のことを，トラス構造の適合行列とよぶ．適合行列は，トラス構造の安定性や不静定次数を判定する際に重要な役割を果たす．たとえば， B が行フルランクであれば，(8)で定義されるトラス構造の剛性行列は正定値行列である．このとき，正定値行列は正則であることから，任意の節点外力 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^8$ に対して釣合式 $K\mathbf{u} = \mathbf{f}$ を満たす解 \mathbf{u} が一意的に存在することがわかる．なお，行列 B^\top は釣合行列とよばれる．

平面骨組構造

平面骨組構造の剛性行列をつくる際にも，トラス構造の場合と同様に，まず1本の部材に着目し，要素座標系を定める．梁要素にはさまざまな提案があるが，以下では Euler–Bernoulli 梁要素を説明する[3–6]．図4に示すように，部材 (i, j) の材軸に沿って座標 $v_x^{(i)}$ および $v_x^{(j)}$ を定め，それと直交する方向に座標 $v_y^{(i)}$ および $v_y^{(j)}$ を定める．また，各節点まわりでの部材の回転角を $\theta^{(i)}$ および $\theta^{(j)}$ で表す．

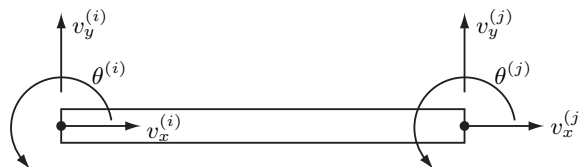


図4: 平面梁要素の要素座標系

剛体変形を除いた要素の実質の変形のことを，一般化ひずみとよぶ．トラス要素の場合には，部材の伸びが一般化ひずみの役割を果たす．一方，平面梁要素の場合には一般化ひずみには3つの自由度

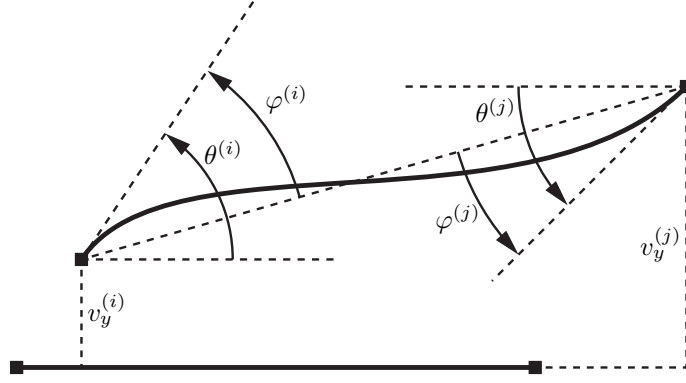


図 5: 平面梁要素の回転角

があり、その選び方には任意性がある。図5で示すように、材端の実質的な回転角 $\varphi^{(i)}$ および $\varphi^{(j)}$ を定義する。また、トラス要素の場合と同様に、部材の伸びを c で表す。すると、 $(c, \varphi^{(i)}, \varphi^{(j)})$ の組は平面梁要素の一般化ひずみの役割を果たす。微小変形の仮定の下では、 $c, \varphi^{(i)}, \varphi^{(j)}$ は

$$c \simeq \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} v_x^{(i)} \\ v_y^{(i)} \\ \theta^{(i)} \\ v_x^{(j)} \\ v_y^{(j)} \\ \theta^{(j)} \end{bmatrix}, \quad \varphi^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/l \\ 1 \\ 0 \\ -1/l \\ 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} v_x^{(i)} \\ v_y^{(i)} \\ \theta^{(i)} \\ v_x^{(j)} \\ v_y^{(j)} \\ \theta^{(j)} \end{bmatrix}, \quad \varphi^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/l \\ 0 \\ 0 \\ -1/l \\ 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} v_x^{(i)} \\ v_y^{(i)} \\ \theta^{(i)} \\ v_x^{(j)} \\ v_y^{(j)} \\ \theta^{(j)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

と表せる。以下では、定ベクトル \mathbf{b} , \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 および（要素座標系での）節点変位ベクトル \mathbf{v} を

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/l \\ 1 \\ 0 \\ -1/l \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/l \\ 0 \\ 0 \\ -1/l \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x^{(i)} \\ v_y^{(i)} \\ \theta^{(i)} \\ v_x^{(j)} \\ v_y^{(j)} \\ \theta^{(j)} \end{bmatrix}$$

で定義して、(12) を

$$c = \mathbf{b}^\top \mathbf{v}, \quad \varphi^{(i)} = \mathbf{d}_1^\top \mathbf{v}, \quad \varphi^{(j)} = \mathbf{d}_2^\top \mathbf{v} \quad (13)$$

と書くことにする。

梁要素の断面2次モーメントを I で表すと、要素座標系における剛性行列 \hat{K} は次のように与えられる：

$$\hat{K} = \frac{EA}{l} \mathbf{b} \mathbf{b}^\top + \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^\top \\ \mathbf{d}_2^\top \end{bmatrix}. \quad (14)$$

ここで、(14) の右辺第1項は、本質的にトラス要素の剛性行列と同じであることに注意する。このことから、(14) の右辺第2項が本質的に梁の曲げ変形に対応する剛性行列であることがわかる。ベクトル

ル \mathbf{b} , \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 の定義を用いて (14) を書き下すと

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & 1/l \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & -1/l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|cc} EA/l & & \\ \hline & 4EI/l & 2EI/l \\ & 2EI/l & 4EI/l \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & 1 & 0 & -1/l & 0 \\ 0 & 1/l & 0 & 0 & -1/l & 1 \end{array} \right] \quad (15)$$

となる。

次に、要素座標系と全体座標系との間の座標変換を考える。平面骨組構造の全体座標系における節点変位ベクトルを

$$\mathbf{u} = \left[u_x^{(1)} \quad u_y^{(1)} \quad \Theta^{(1)} \mid \dots \mid u_x^{(n)} \quad u_y^{(n)} \quad \Theta^{(n)} \right]^T \in \mathbb{R}^{3n}$$

で表す (図 6)。ただし、 n は自由節点の数である。図 6(b) に示す全体座標系 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{3n}$ から図 6(a) に示す部材 e の要素座標系 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^6$ への座標変換は、定行列 $T_e \in \mathbb{R}^{6 \times 3n}$ を用いて

$$\mathbf{v} = T_e \mathbf{u}$$

の形で表すことができる。ここで T_e は

$$T_e = \begin{bmatrix} u_x^{(1)} & \dots & u_x^{(i)} & u_y^{(i)} & \Theta^{(i)} & \dots & u_x^{(j)} & u_y^{(j)} & \Theta^{(j)} & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & & \alpha_e & \beta_e & & & & & & \leftarrow v_x^{(i)} \\ & & -\beta_e & \alpha_e & & & & & & \leftarrow v_y^{(i)} \\ & & & & 1 & & & & & \leftarrow \theta^{(i)} \\ & & & & & & \alpha_e & \beta_e & & \leftarrow v_x^{(j)} \\ & & & & & & -\beta_e & \alpha_e & & \leftarrow v_y^{(j)} \\ & & & & & & & & 1 & \leftarrow \theta^{(j)} \end{bmatrix}$$

で与えられ、 α_e および β_e は図 6(a) に示す角度 κ を用いて

$$\alpha_e = \cos \kappa, \quad \beta_e = \sin \kappa$$

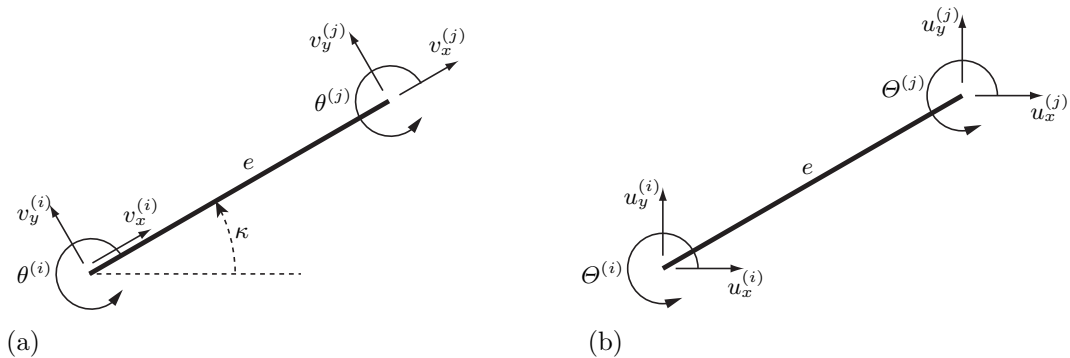


図 6: 平面骨組 e に対する (a) 要素座標系と (b) 全体座標系

で与えられる。ベクトル \mathbf{b} , \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 は全体座標系について

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{b}}_e &= T_e^\top \mathbf{b}_e, \\ \tilde{\mathbf{d}}_{e,1} &= T_e^\top \mathbf{d}_1, \\ \tilde{\mathbf{d}}_{e,2} &= T_e^\top \mathbf{d}_2\end{aligned}$$

と座標変換されるため、全体座標系に対する部材 e の部材剛性行列（要素剛性行列）は

$$K_e = \frac{EA_e}{l_e} \tilde{\mathbf{b}}_e \tilde{\mathbf{b}}_e^\top + \frac{EI_e}{l_e} \left[\tilde{\mathbf{d}}_{e,1} \mid \tilde{\mathbf{d}}_{e,2} \right] \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_{e,1}^\top \\ \tilde{\mathbf{d}}_{e,2}^\top \end{bmatrix}$$

である。あとは、トラス構造の場合と同様に、すべての部材に関する部材剛性行列を足し合わせることで骨組構造全体の剛性行列を得ることができる。

要素座標系における剛性行列 (15) において、右辺の真ん中の行列はブロック対角行列である。 \hat{K} は対称行列であることから、右下の 2 行 2 列の行列も対角化することができる。実際、直交行列

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

を用いると

$$Q^\top \begin{bmatrix} 4EI/l & 2EI/l \\ 2EI/l & 4EI/l \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 6EI/l & 0 \\ 0 & 2EI/l \end{bmatrix}$$

が得られる。以下では、対角化の物理的な意味を明確にするために、 Q を定数倍した行列を用いた変換

$$(\sqrt{2}Q)^\top \begin{bmatrix} 4EI/l & 2EI/l \\ 2EI/l & 4EI/l \end{bmatrix} (\sqrt{2}Q) = \begin{bmatrix} 3EI/l & 0 \\ 0 & EI/l \end{bmatrix}$$

を考えることにする。これは、(12) で定義した $(\varphi^{(i)}, \varphi^{(j)})$ を線形変換

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi^{(i)} + \varphi^{(j)} \\ -\varphi^{(i)} + \varphi^{(j)} \end{bmatrix} = \sqrt{2}Q^\top \begin{bmatrix} \varphi^{(i)} \\ \varphi^{(j)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

により (ψ_1, ψ_2) に変換することに相当する。 (c, ψ_1, ψ_2) の組は、 $(c, \varphi^{(i)}, \varphi^{(j)})$ に代わる一般化ひずみの組とみなせる。ここで $\check{\mathbf{d}}_1, \check{\mathbf{d}}_2 \in \mathbb{R}^6$ を

$$\left[\check{\mathbf{d}}_1 \mid \check{\mathbf{d}}_2 \right] = \left[\mathbf{d}_1 \mid \mathbf{d}_2 \right] (\sqrt{2}Q) \quad (17)$$

で定義すれば、(13) より、変数 ψ_1 および ψ_2 と節点変位 \mathbf{v} との関係は

$$\psi_1 = \check{\mathbf{d}}_1^\top \mathbf{v}, \quad \psi_2 = \check{\mathbf{d}}_2^\top \mathbf{v}$$

で与えられることがわかる。

以上のことから、(14) は

$$K = \frac{EA}{l} \mathbf{b} \mathbf{b}^\top + \frac{3EI}{l} \check{\mathbf{d}}_1 \check{\mathbf{d}}_1^\top + \frac{EI}{l} \check{\mathbf{d}}_2 \check{\mathbf{d}}_2^\top \quad (18)$$

と書き直すことができる. (17) で定義した $\check{\mathbf{d}}_1, \check{\mathbf{d}}_2$ を陽に書くと

$$\check{\mathbf{d}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/l \\ 1 \\ 0 \\ -2/l \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{d}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である. これを用いて (18) を書き下すと

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/l & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/l & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} EA/l & & \\ \hline & 3EI/l & \\ \hline & & EI/l \end{array} \right] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/l & 1 & 0 & -2/l & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

となる.

(3) や (19) で示したような剛性行列の分解 (対角化) は, 構造物の最適設計問題のモデリングにおいてしばしば重要な役割を果たす [1, 2, 7].

演習問題

- 1) 図 7 に示す平面トラス構造の剛性行列 K を求めよ. ただし, 各部材の断面積を A , Young 率を E とする.

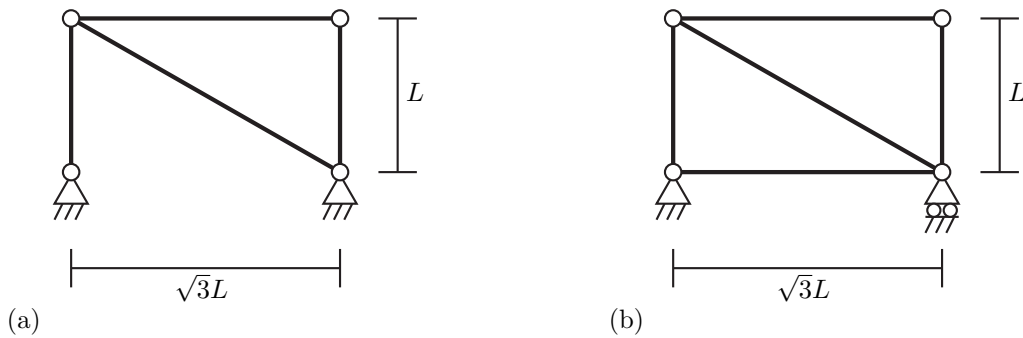


図 7: 演習問題 1 の平面トラス構造

- 2) 平面梁要素について, (18) で用いられているベクトル $\mathbf{b}, \check{\mathbf{d}}_1, \check{\mathbf{d}}_2$ が互いに直交することを確認せよ. また, (16) で定義される一般化ひずみ ψ_1 および ψ_2 の物理的な意味を明らかにせよ.

3) 図 8 に示す平面トラス構造の適合行列 B を求めよ. また, 方程式 $B\mathbf{u} = \mathbf{0}$ の解を (すべて) 求めよ.

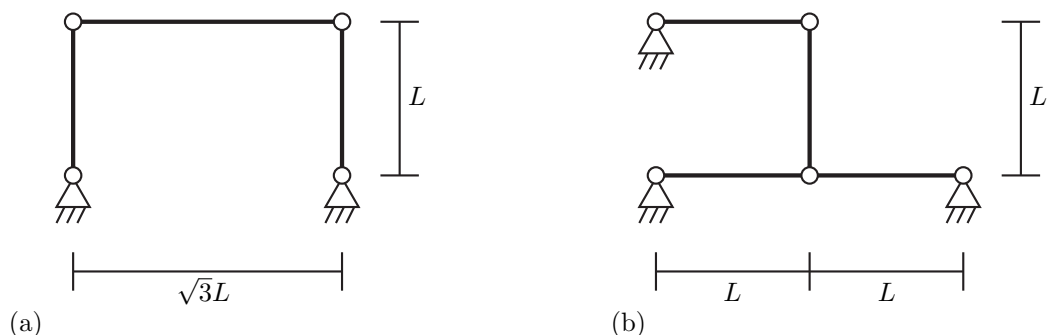


図 8: 演習問題 3 の平面トラス構造

4) 図 9 に示す平面骨組構造の剛性行列 K を求めよ.

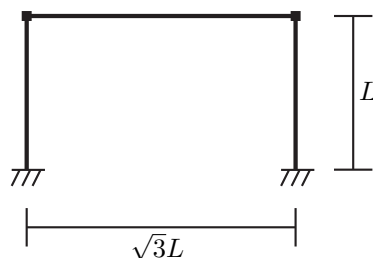


図 9: 演習問題 4 の平面骨組構造

参考文献

- [1] Y. Kanno: Mixed-integer second-order cone programming for global optimization of compliance of frame structure with discrete design variables. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **54**, 301–316 (2016).
- [2] R. Kureta, Y. Kanno: A mixed integer programming approach to designing periodic frame structures with negative Poisson's ratio. *Optimization and Engineering*, **15**, 773–800 (2014).
- [3] 室田 一雄, 杉原 正顕: 『東京大学工学教程・線形代数 I』. 丸善出版 (2015).
- [4] 中村 恒善 (編): 『建築構造力学 図説・演習 II (第 2 版)』, 丸善 (1994).
- [5] 大崎 純, 本間 俊雄: 『例題で学ぶ建築構造力学 2: 不静定構造力学編』. コロナ社 (2013).
- [6] E. Oñate: *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Vol. 2: Beams, Plates and Shells*. Springer, Berlin (2013).
- [7] M. Stolpe: On the reformulation of topology optimization problems as linear or convex quadratic mixed 0-1 programs. *Optimization and Engineering*, **8**, 163–192 (2007).

(2017 年 4 月, 寒野)