

# 不確定な外力を受けるトラスの 極限解析に対する大域的最適化手法

寒野 善博<sup>†</sup>      竹脇 出<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> 東京大学大学院 (数理情報学専攻)

<sup>‡</sup> 京都大学大学院 (都市環境工学専攻)

August 31, 2007

# 目的

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

- 不確定性解析
  - 凸モデル, インフォ・ギャップ理論, etc.
- 極限解析 (崩壊荷重係数)
  - 確率論的な極限解析 [Marti & Stoeckel 04]  
[Lloyd Smith, Chuang & Munro 90], [Staat & Heitzer 03]
  - 非確率論的 (#)
- worst-case detection
  - 反最適化 [Elishakoff, Haftka & Fang 94]
  - 2 段階計画法 [Cheng *et al.* 02], [Craig *et al.* 03]
  - 線形近似を用いない & 大域解 (#)

# 目的

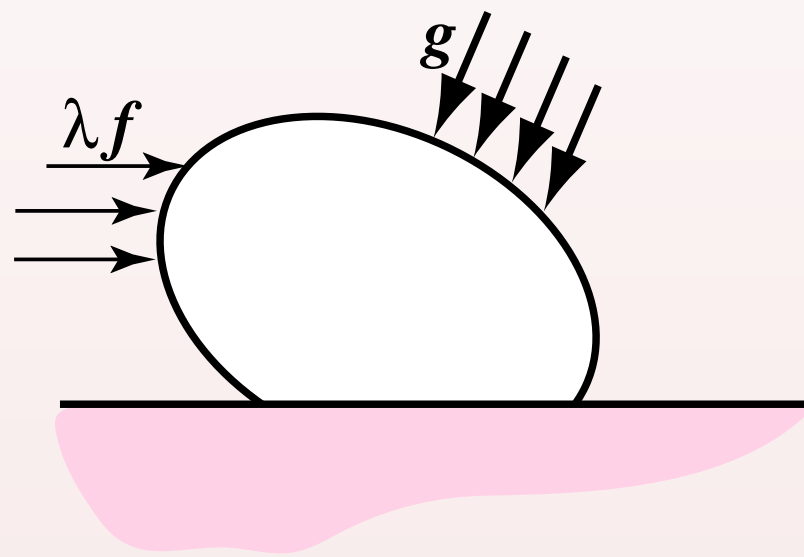
- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

- 不確定性解析
  - 凸モデル, インフォ・ギャップ理論, etc.
- 極限解析 (崩壊荷重係数)
  - 確率論的な極限解析 [Marti & Stoeckel 04]  
[Lloyd Smith, Chuang & Munro 90], [Staat & Heitzer 03]
  - 非確率論的 (#)
- worst-case detection
  - 反最適化 [Elishakoff, Haftka & Fang 94]
  - 2 段階計画法 [Cheng *et al.* 02], [Craig *et al.* 03]
  - 線形近似を用いない & 大域解 (#)
- 大域的最適化が自然に要求される問題 (#)

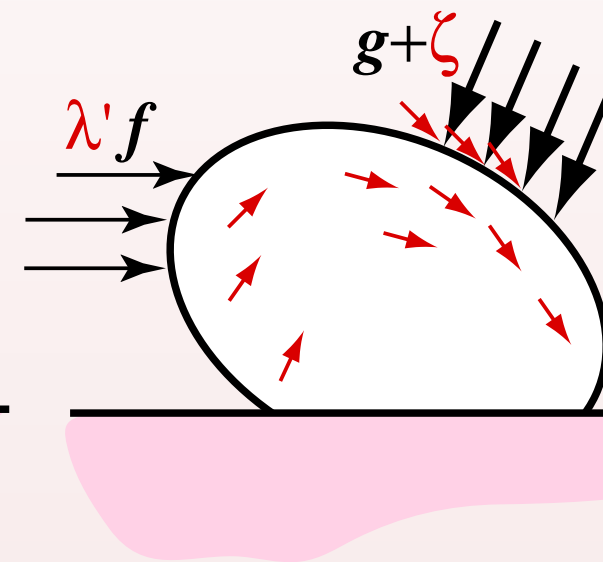
# 荷重が不確定な極限解析

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

- 付加的な荷重  $\zeta$  が存在
  - 崩壊荷重係数が大きく低下?
  - 崩壊モードが変化?
- $\zeta$  のばらつきの範囲を与えて
  - 崩壊荷重係数の最小値と, そのときの  $\zeta$  を求める



公称値の状況



不確定な状況

# 極限解析 ( $f_D$ が与えられたとき)

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

$$\lambda^*(f_D) = \max_{\lambda, q} \{ \lambda : (\lambda, q) \in Q(f_D) \} \quad (\text{LP})$$

$$\bullet (\lambda, q) \in Q(f_D) \iff$$

$$Bq = f_D + \lambda f_R \quad (\text{釣合式})$$
$$|q_i| - q_i^y \leq 0 \quad (\text{降伏条件})$$

$q$  : 軸力  
 $f_R, q^y$  : 確定的 (とみなす)

- $f_D$  の不確定性を考える

# 極限解析 ( $f_D$ が与えられたとき)

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

$$\lambda^*(f_D) = \max_{\lambda, q} \{ \lambda : (\lambda, q) \in Q(f_D) \} \quad (\text{LP})$$

$$\bullet (\lambda, q) \in Q(f_D) \iff$$

$$Bq = f_D + \lambda f_R \quad (\text{釣合式})$$
$$|q_i| - q_i^y \leq 0 \quad (\text{降伏条件})$$

$q$  : 軸力

$f_R, q^y$  : 確定的 (とみなす)

$\lambda^*(f_D)$  : 崩壊荷重係数

$f_D$  の関数とみなせる

- $f_D$  の不確定性を考える

# 不確定性モデル

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

$$f_D = \tilde{f}_D + T\zeta \quad (\text{LP})$$

$\tilde{f}_D$  : 公称値

$T$  : 定行列

- 不確定パラメータ  $\zeta$

# 不確定性モデル

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

$$f_D = \tilde{f}_D + T\zeta \quad (\text{LP})$$

$\tilde{f}_D$  : 公称値

$T$  : 定行列

## ● 不確定パラメータ $\zeta$

$$\alpha \geq |\zeta_j|, \quad j = 1, \dots, m$$

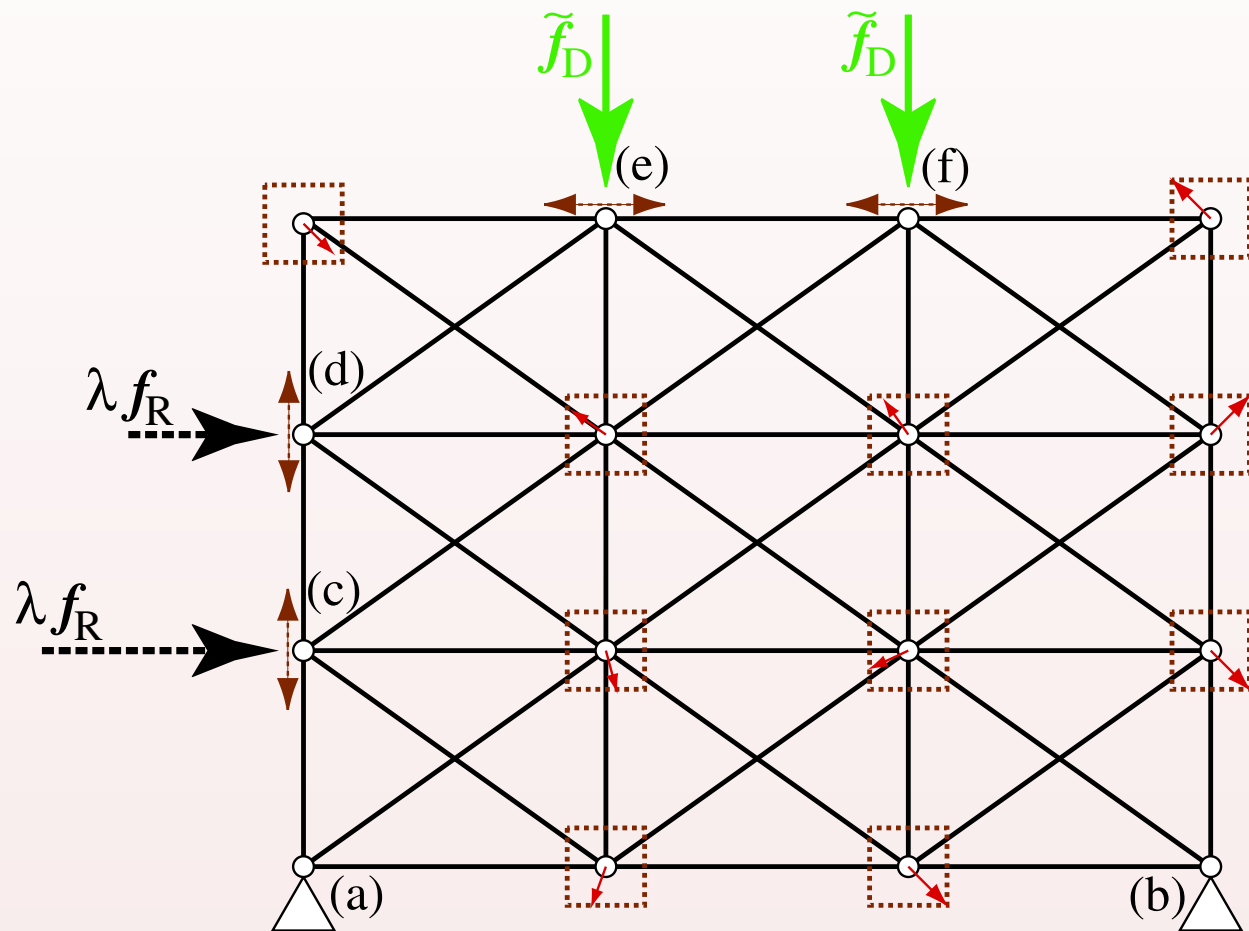
- $\alpha$  : 不確定性の‘大きさ’
- $f_D \in \mathcal{F}_D(\alpha)$  と書く
- 以下では,  $\alpha$  は定数とみなす



# 不確定な $f_D$ の例

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

- 公称値 :  $\tilde{f}_D$
- 不確定な荷重  $T\zeta$  が付加的に作用



# 最悪崩壊荷重係数

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- **最悪崩壊荷重係数**
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

$$\text{(定義)} \quad \lambda_{\min}(\alpha) = \min_{f_D} \{ \lambda^*(f_D) : f_D \in \mathcal{F}_D(\alpha) \} \quad (\clubsuit)$$

**最適解  $f_D^*$  : クリティカル外乱**

**$\lambda^*(f_D)$  :  $f_D$  に対応する崩壊荷重係数**

- **(♣) は非凸**
- **(♣) の局所解は  $\lambda^*$  の下界とは限らない**
  - 大域解を求めることが 工学的に重要
  - 通常の 非線形計画法 は使えそうにない
- **大域的最適化の手法が必要**

# 最悪崩壊荷重係数

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- **最悪崩壊荷重係数**
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

$$\text{(定義)} \quad \lambda_{\min}(\alpha) = \min_{f_D} \{ \lambda^*(f_D) : f_D \in \mathcal{F}_D(\alpha) \} \quad (\clubsuit)$$

**最適解  $f_D^*$  : クリティカル外乱**

**$\lambda^*(f_D)$  :  $f_D$  に対応する崩壊荷重係数**

- **(♣) は非凸**
- **(♣) の局所解は  $\lambda^*$  の下界とは限らない**
  - **大域解を求めることが工学的に重要**
  - **通常の下線形計画法は使えそうにない**
- **大域的最適化の手法が必要**

# 最悪崩壊荷重係数

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- **最悪崩壊荷重係数**
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

$$\text{(定義)} \quad \lambda_{\min}(\alpha) = \min_{f_D} \{ \lambda^*(f_D) : f_D \in \mathcal{F}_D(\alpha) \} \quad (\clubsuit)$$

**最適解  $f_D^*$  : クリティカル外乱**

**$\lambda^*(f_D)$  :  $f_D$  に対応する崩壊荷重係数**

- $\implies$  **混合 0-1 計画問題 (MIP) に帰着できる:**

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

# 混合 0-1 計画問題

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

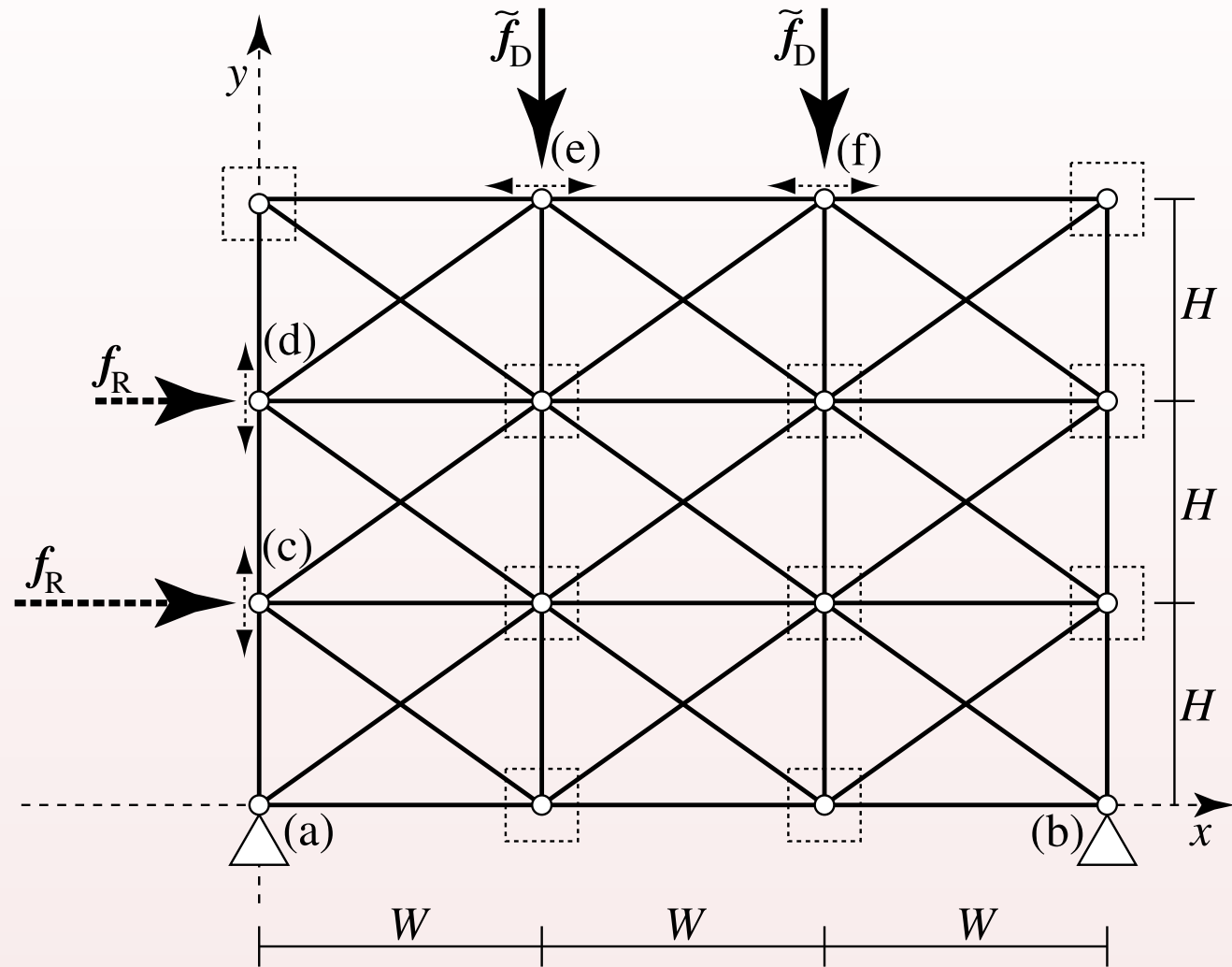
$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

- 分枝カット法
  - ‘分枝限定法’ + ‘切除平面法’
- 分枝限定法
  - 線形計画 (LP) 緩和
$$x_i \in \{0, 1\} \quad \longrightarrow \quad 0 \leq x_i \leq 1$$
- 切除平面法
  - 離接カット (disjunctive cut) [Balas 74, 98]

# 例題 (28 自由度, 42 部材)

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 離接カット

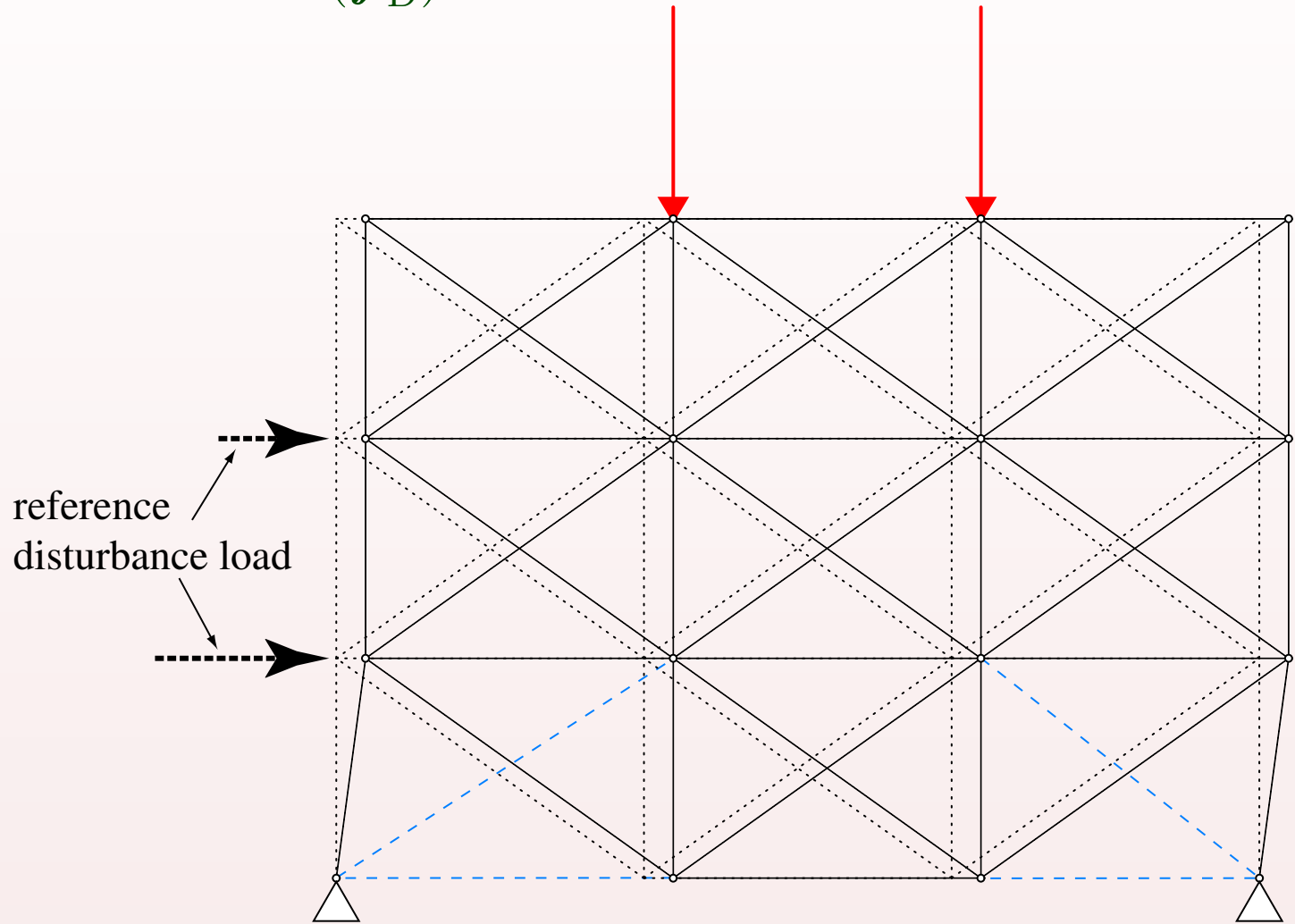
- $f_D$  が不確定



# 例題 (28 自由度, 42 部材)

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

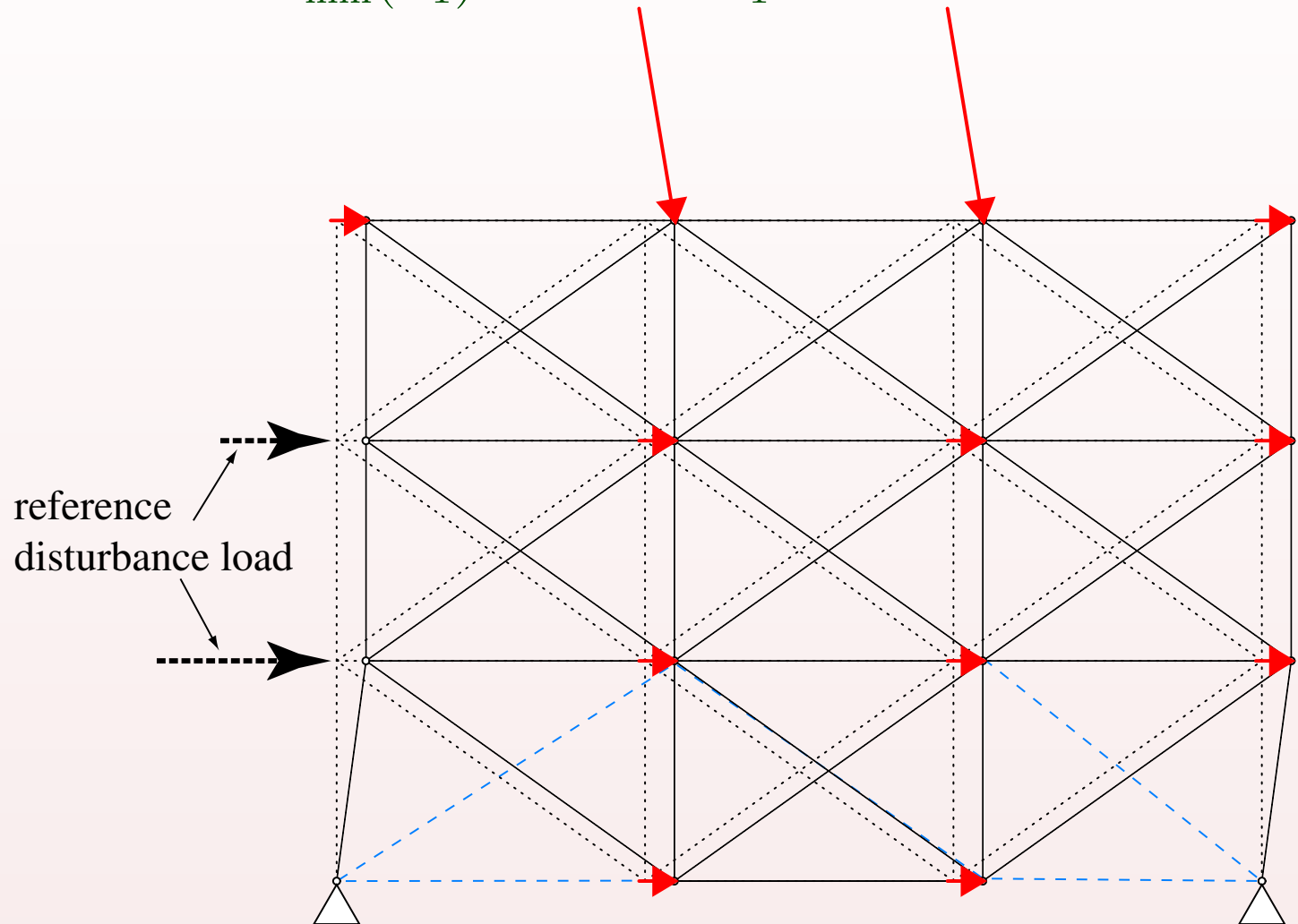
- 公称値 :  $\lambda^*(\tilde{f}_D) = 48.4$



# 例題 (28 自由度, 42 部材)

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

- **最悪値** :  $\lambda_{\min}(\alpha_1) = 44.4$      $\alpha_1 = 20.0$  kN

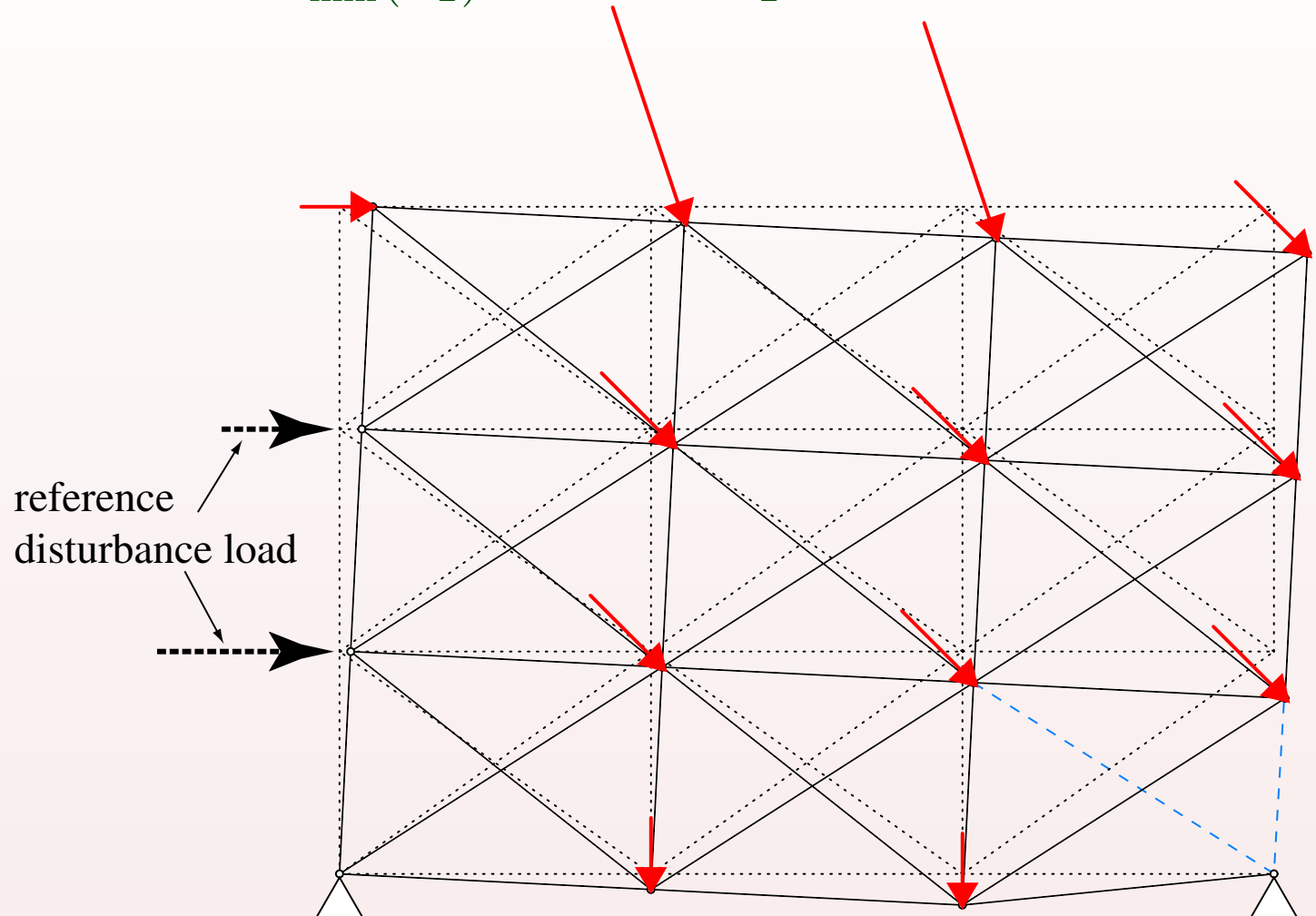




# 例題 (28 自由度, 42 部材)

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

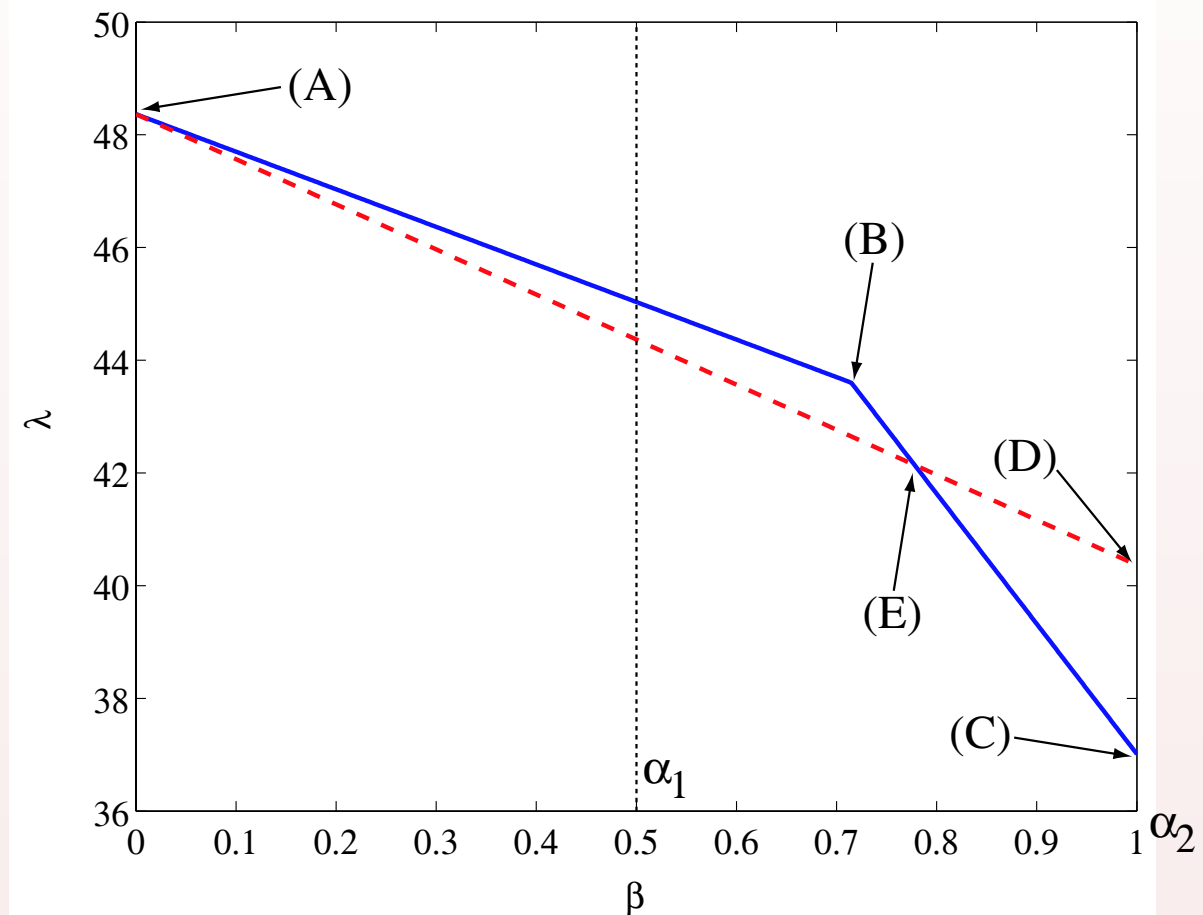
- **最悪値** :  $\lambda_{\min}(\alpha_2) = 37.0$      $\alpha_2 = 40.0$  kN



# 例題 (28 自由度, 42 部材)

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

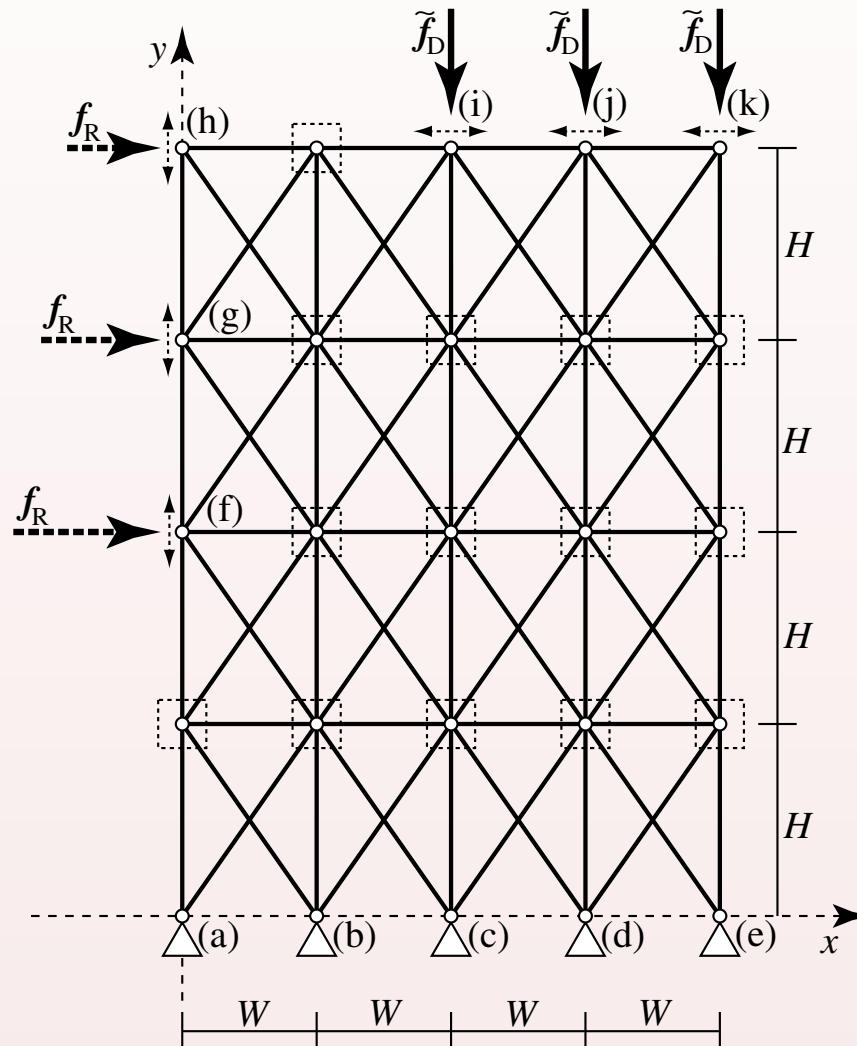
- — :  $\lambda^*(\beta f_{D1}^*)$     - - :  $\lambda^*(2\beta f_{D2}^*)$
- クリティカル外乱, 最悪値, モード :  $\alpha$  に依存



# 例題 (40 自由度, 68 部材)

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 離接カット

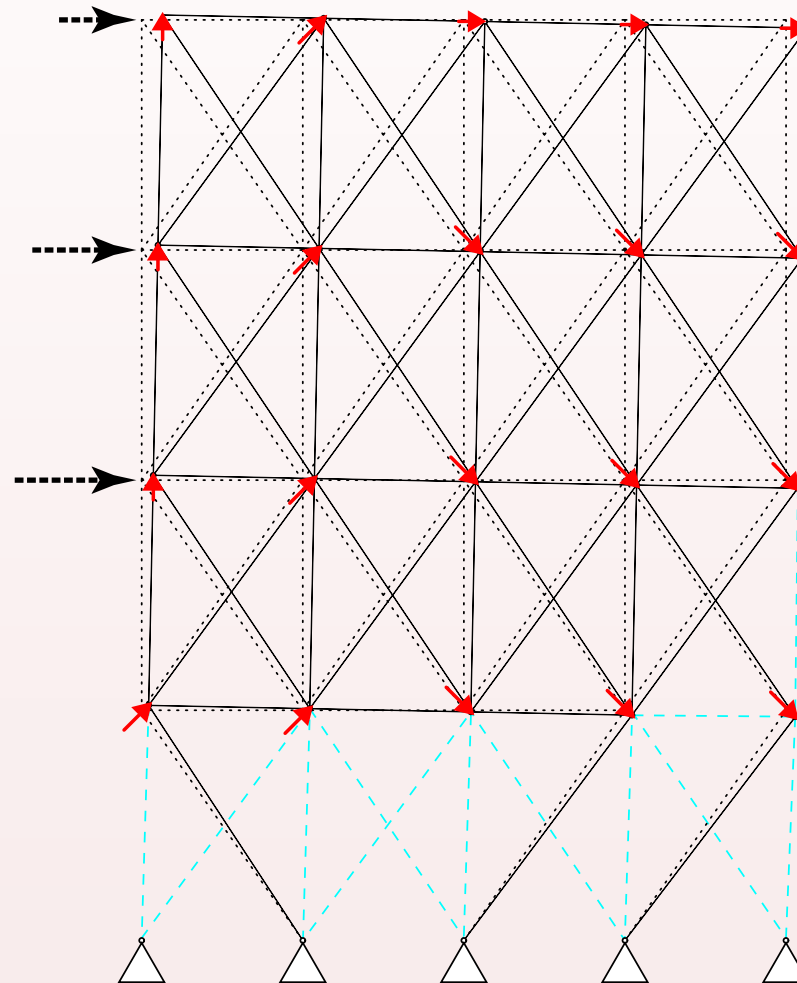
- $f_D$  が不確定 公称値 :  $\lambda^*(\tilde{f}_D) = 14.3$



# 例題 (40 自由度, 68 部材)

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 離接カット

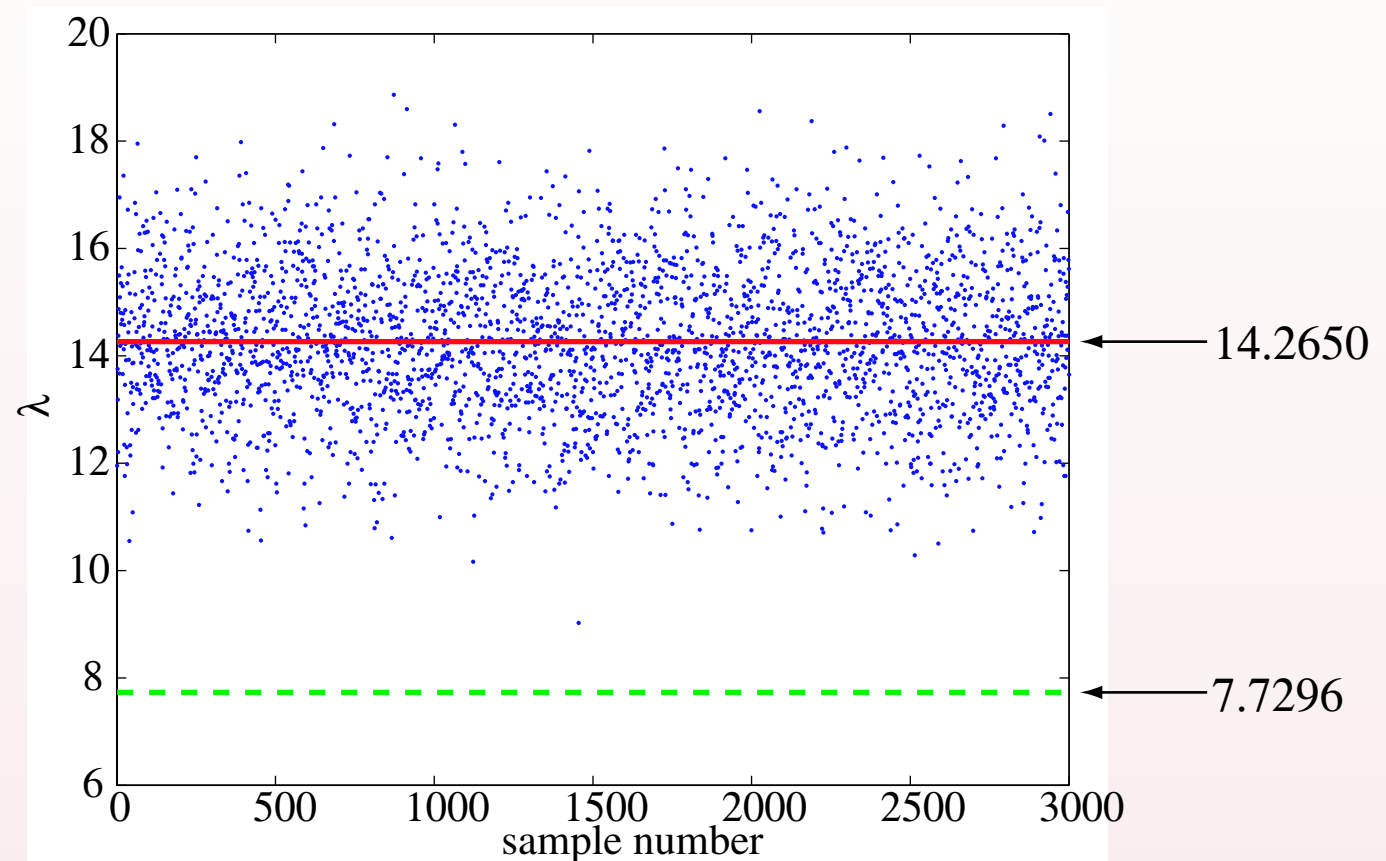
- **最悪値** :  $\lambda_{\min}(\alpha_1) = 7.73$      $\alpha_1 = 40.0$  kN
- **カット** : 34 ,    B&B : 9 LPs



# 例題 (40 自由度, 68 部材)

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 離接カット

- ランダムに生成した外力に対する崩壊荷重係数



# 結論

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

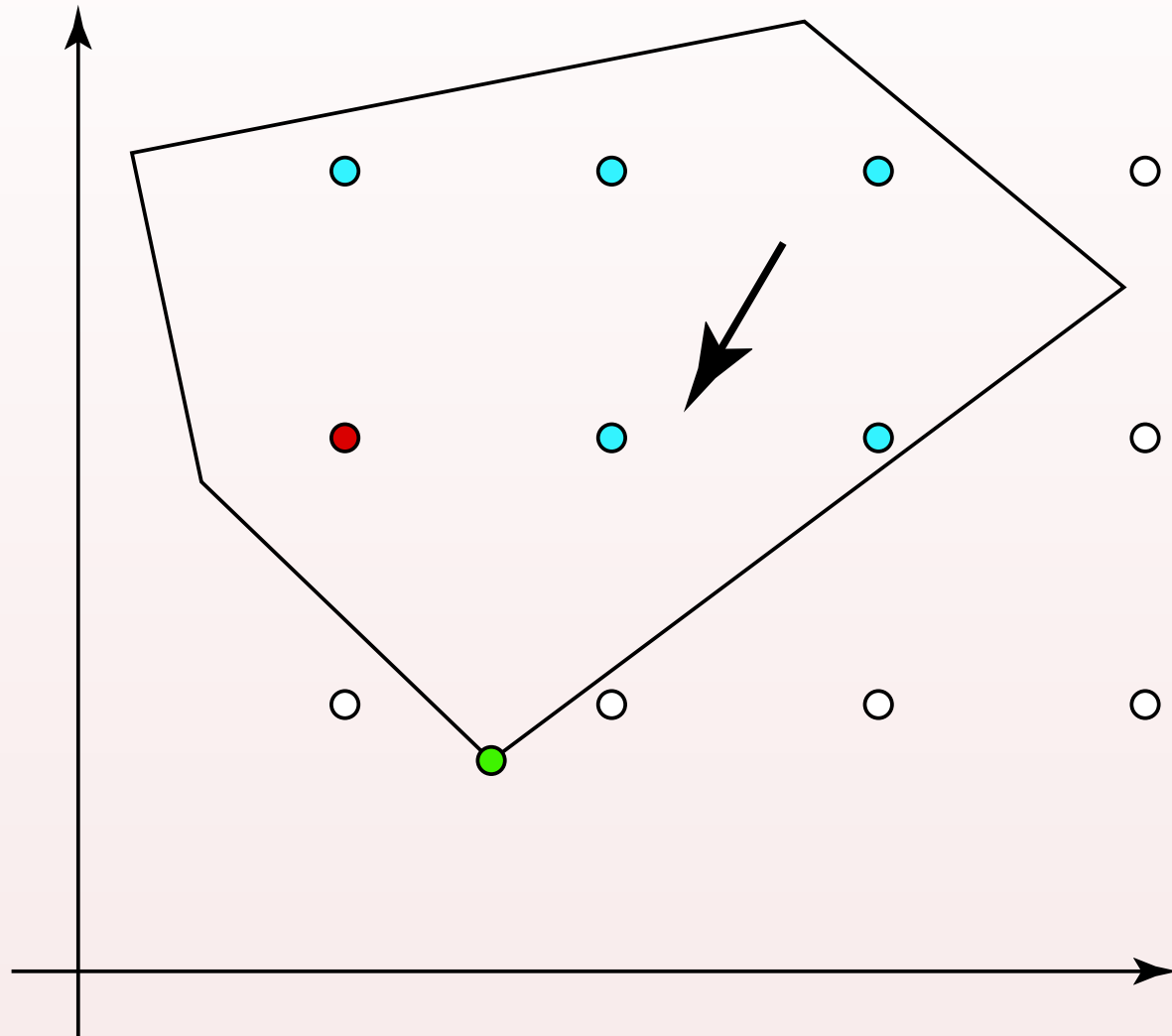
- 極限解析
  - 外力の不確定性 (非確率論的)
  - 最悪崩壊荷重係数・クリティカル外乱を定義
- 大域的最適化 (分枝カット法)
  - 混合 0-1 計画問題
  - 離接カットを生成する LP 問題
- 最悪ケース
  - 崩壊荷重係数が大きく低下
  - 崩壊モードが変化
  - 最悪荷重は自明ではない

補足

# 離接カット

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

## LP 緩和

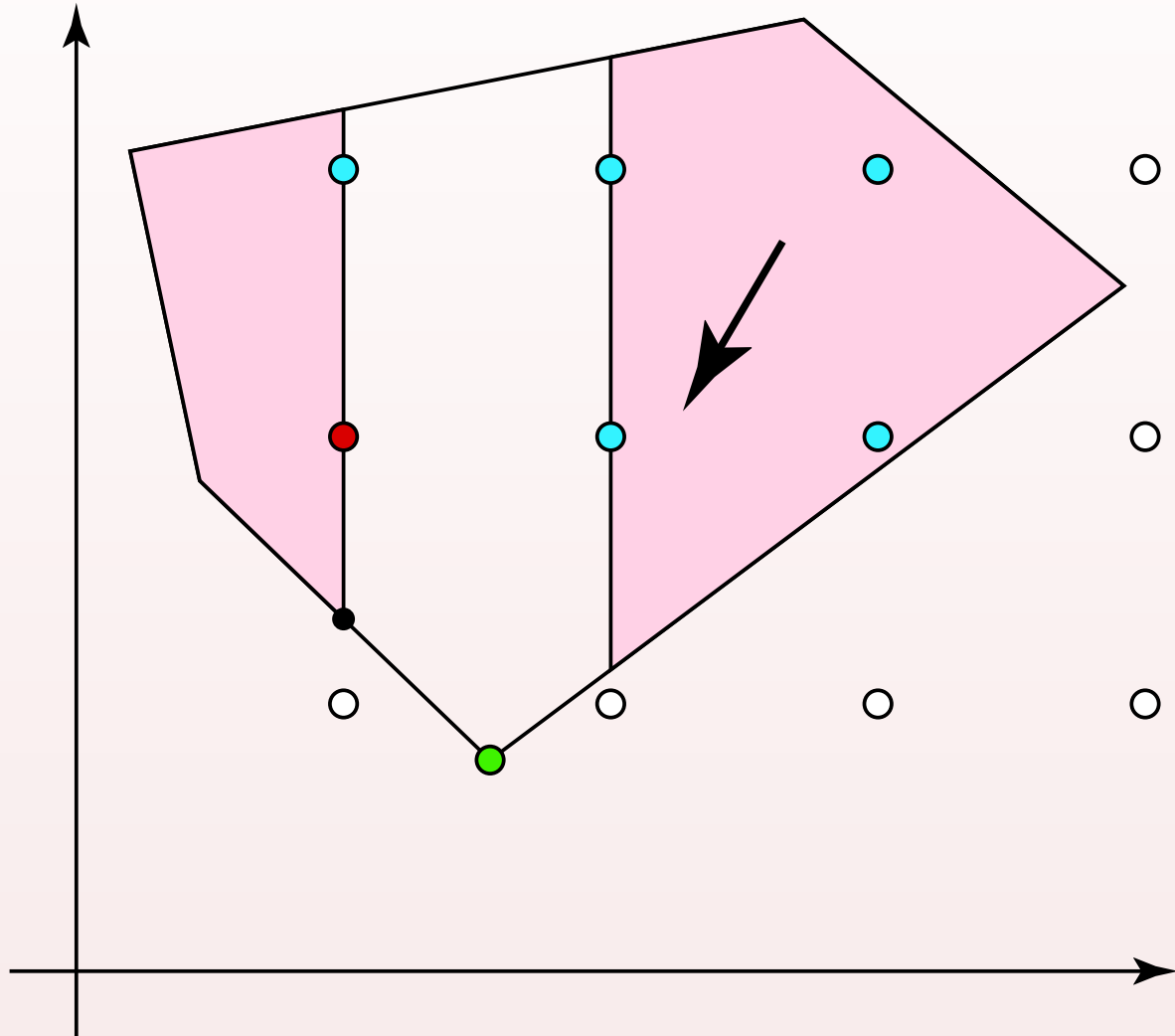




# 離接カット

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

## 離接集合



# 離接カット

- 目的
- 荷重が不確定な極限解析
- 極限解析
- 不確定性モデル
- 不確定な  $f_D$  の例
- 最悪崩壊荷重係数
- 混合 0-1 計画問題
- 42 部材トラス
- 68 部材トラス
- 結論
- 
- 離接カット

## 離接計画緩和とカット

