摩擦なし接触を伴う構造物の
トポロジー最適化

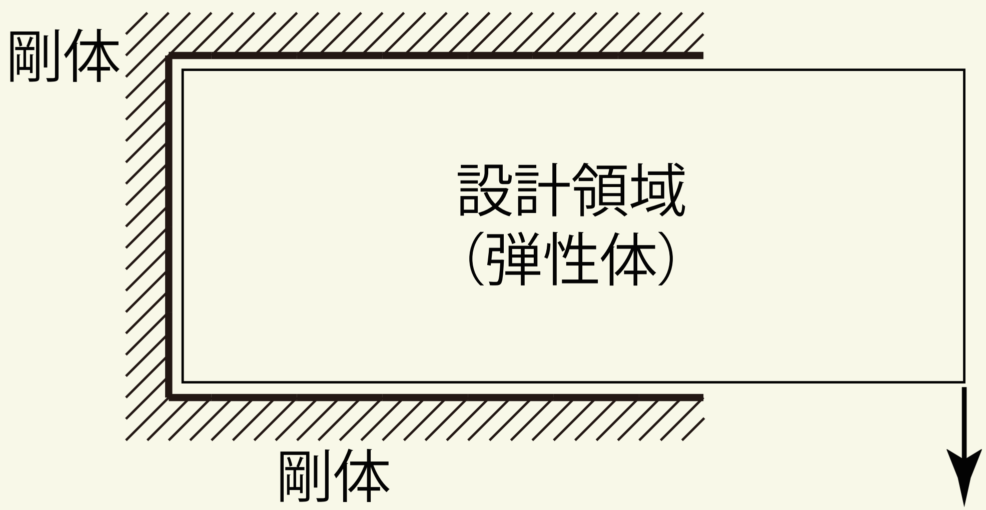
寒野 善博

東京大学　数理・情報教育研究センター

JSME D&S (Sept. 25–27, 2019)

接触を伴うトポロジー最適化

- 弾性体と剛体の接触，弾性体どうしの接触
  - ただし，微小変形を仮定
- 初期ギャップ (≥ 0) を指定
- 弾性体が変形後に 接触するか否かは 未知
- 弾性体の剛性最大化

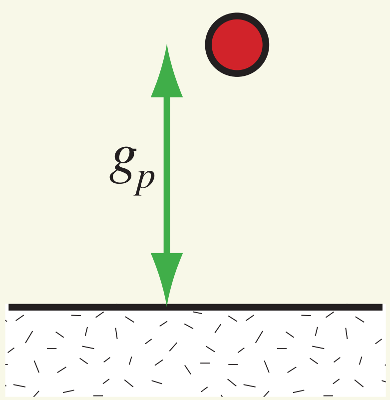


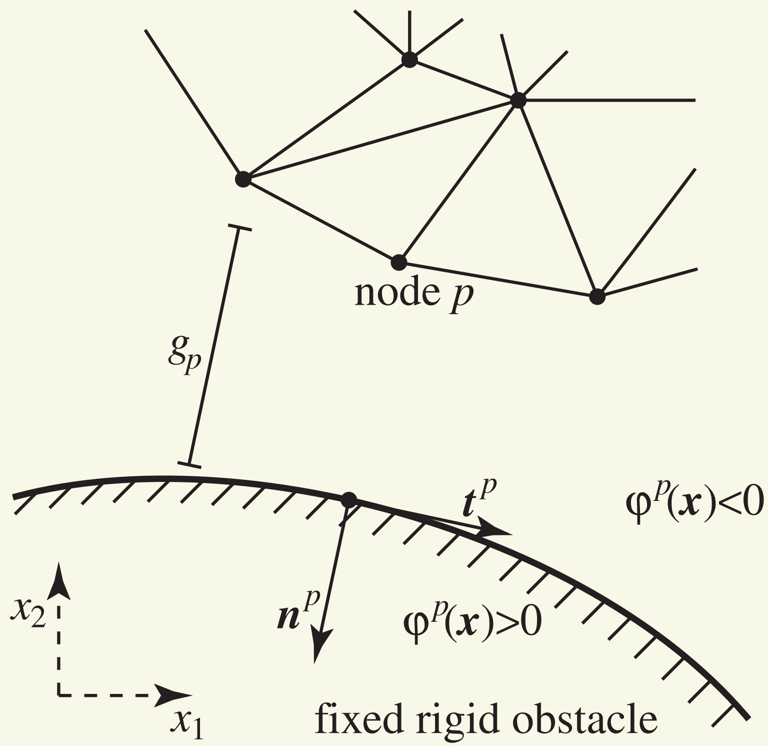
Y. Kanno (D&S 2019)

片側接触条件

- g_p: 初期ギャップ　　$h_p = g_p - \langle \boldsymbol{n}^p, \boldsymbol{u} \rangle$: 変形後のギャップ
- $r_{\mathrm{n}p}$: 反力（法線方向）

$$\begin{aligned} h_p > 0 \quad &\Rightarrow \quad r_{\mathrm{n}p} = 0 \qquad &: \text{free} \\ r_{\mathrm{n}p} < 0 \quad &\Rightarrow \quad h_p = 0 \qquad &: \text{contact} \end{aligned}$$



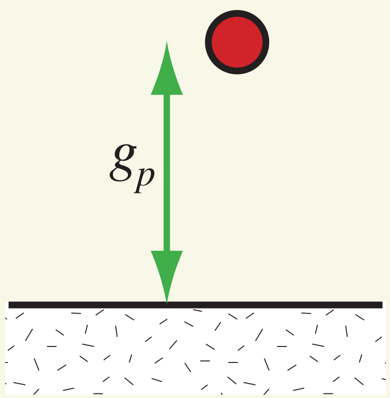


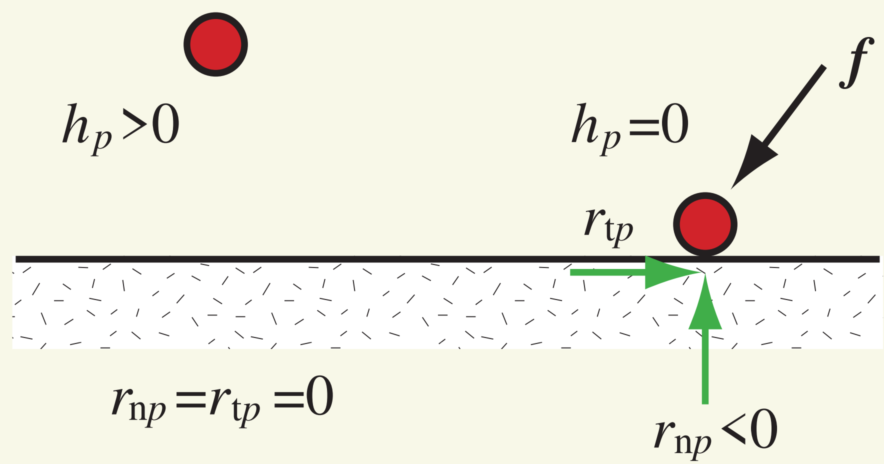
Y. Kanno (D&S 2019)

片側接触条件

- g_p: 初期ギャップ　　$h_p = g_p - \langle \boldsymbol{n}^p, \boldsymbol{u} \rangle$: 変形後のギャップ
- $r_{\mathrm{n}p}$: 反力（法線方向）

$$
\begin{array}{llll}
h_p > 0 & \Rightarrow & r_{\mathrm{n}p} = 0 & \text{: free} \\
r_{\mathrm{n}p} < 0 & \Rightarrow & h_p = 0 & \text{: contact}
\end{array}
$$





$h_p \geq 0$　：非貫通　　（まとめて $\boldsymbol{g} - C_{\mathrm{n}} \boldsymbol{u}$ と書く）

$r_{\mathrm{n}p} \leq 0$　：非固着

コンプライアンスの定義

- 柔性の指標
- 強制変位 $= 0$ のとき（最も標準的な問題設定）
  - コンプライアンス = 外力仕事
- 非ゼロの強制変位を与えたとき

コンプライアンスの定義

- 柔性の指標
- 強制変位 $= 0$ のとき（最も標準的な問題設定）
  - コンプライアンス $=$ 外力仕事
- 非ゼロの強制変位を与えたとき
  - 反力が（$\therefore$ 外力仕事が）大きい方が，より剛
  - コンプライアンス $:=$ $\boxed{-2\times\ \text{ポテンシャルエネルギー}}$ の最大値

$$\sup_{\boldsymbol{u}}\{2\boldsymbol{p}^{\top}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{\top}K\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in U\} \qquad (\spadesuit)$$

[Niu, Xu, & Cheng ’11], [Klarbring & Strömberg ’12]

- 接触を伴うとき
  - ($\spadesuit$) に準ずる.

最適設計問題の定式化

- 設計変数：$\boldsymbol{x}$
- コンプライアンス：$\pi(\boldsymbol{x})$

$$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 2\boldsymbol{p}^{\top}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{\top}K(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \qquad \text{(}-2\times \text{ ポテンシャル E)}$$

とおくと，

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{u}}\{\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \mid C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{g}\}.$$

- 最適設計（剛性最大化）問題：

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & \pi(\boldsymbol{x}) \\ \text{s. t.} \quad & \boldsymbol{x} \in X. \end{aligned}$$

既存手法　[Hilding, Klarbring, & Pang '99], [Tin-Loi '99], etc.

- コンプライアンス：$\pi(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{u}} \{\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \mid C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u} \le \boldsymbol{g}\}$
- 右辺の Lagrange 関数（$\boldsymbol{r}$ が Lagrange 乗数）：

$$L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r};\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) - 2\boldsymbol{r}^{\top}(\boldsymbol{g} - C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u}) & \text{if } \boldsymbol{r} \le \boldsymbol{0}, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- 右辺の KKT 条件：

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r};\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{g} - C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{r} \le \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{g} - C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u})^{\top}\boldsymbol{r} = 0.$$

- $$\therefore \quad \text{(最適設計問題)} \overset{\text{equiv}}{=} \begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{x}\in X}{\text{Min.}} & \phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \\ \text{s. t.} & \text{(KKT).} \end{array}$$

  - これは，MPEC という，難しい問題
    - Z.-Q. Luo, J.-S. Pang, D. Ralph: *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, (1996), 401 pp.

MPEC（相補性制約）の難しさ

- 相補性制約：

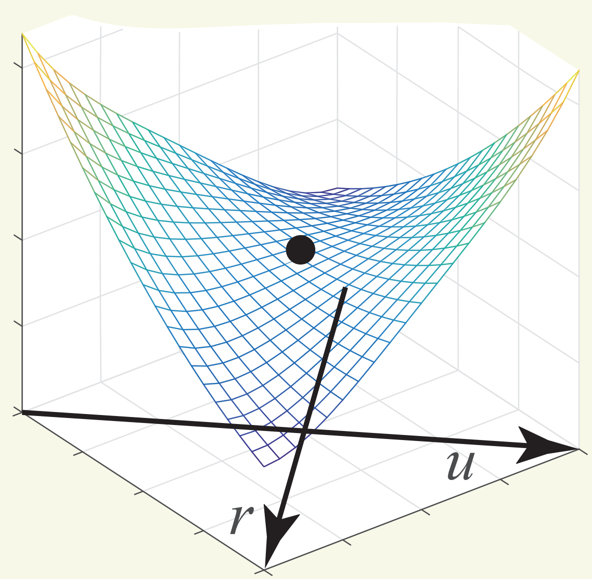
$$\boxed{y_j \geq 0, \quad z_j \geq 0, \quad y_j z_j = 0.}$$

- 標準的な制約想定を満たさない.
- 制約想定は，KKT 条件の仮定
  - MPEC の（局所）最適解は，KKT 条件を満たすとは限らない.
- 非線形計画の標準的な解法は，KKT 点を求めることが目標
  - 標準的な解法では，MPEC の（局所）最適解は得られそうにない.
  - 種々の特別な解法が，提案されてきた.
- $\longrightarrow$ 相補性制約をもたない定式化が望ましい.

Lagrange 双対性の利用

- 最適設計問題： $\inf_{x \in X} \pi(\boldsymbol{x})$
- コンプライアンス：$\pi(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} \{\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \mid C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u} \le \boldsymbol{g}\}$
  - Lagrange 関数：$L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x})$ （主変数は $\boldsymbol{u}$，双対変数は $\boldsymbol{r}$）
- Lagrange 双対性より，

$$\boxed{\pi(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} \inf_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^c} L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^c} \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x})}$$



Lagrange 双対性の利用

- 最適設計問題： $\inf_{x \in X} \pi(\boldsymbol{x})$
- コンプライアンス：$\pi(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} \{\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \mid C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{g}\}$
  - Lagrange 関数：$L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x})$
- Lagrange 双対性より,

$$\boxed{\pi(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} \inf_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^c} L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^c} \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x})}$$

- 最適設計問題は,

$$\boxed{\inf_{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}) \in X \times \mathbb{R}^c} \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x})}$$

Lagrange 双対性の利用

- 最適設計問題： $\inf_{\boldsymbol{x} \in X} \pi(\boldsymbol{x})$
- コンプライアンス：$\pi(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} \{\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \mid C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u} \le \boldsymbol{g}\}$
  - Lagrange 関数：$L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x})$
- Lagrange 双対性より,

$$\boxed{\pi(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} \inf_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^c} L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^c} \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x})}$$

- 最適設計問題は,

$$\inf_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) \in X \times \mathbb{R}^c} \underbrace{\sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x})}_{\text{あとは，ここが計算できれば,}}$$

  - 通常の（= MPEC でない）最適化問題に.

「あとは，ここが計算できれば」の計算

- $$\sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r};\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \pi^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) - 2\boldsymbol{g}^{\top}\boldsymbol{r} & \text{if } \boldsymbol{r} \le \boldsymbol{0}, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$
- $\pi^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})$ は コンプリメンタリエネルギー
- 簡単のため，トラスの場合は，

$$\pi^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) = \sum_{e=1}^{m} \frac{1}{2}\frac{1}{k_e} q_e^2 \quad \text{with } \underbrace{\sum_{e=1}^{m} q_e \boldsymbol{b}_e = \boldsymbol{p} + C_{\mathrm{n}}^{\top}\boldsymbol{r}}_{\text{(力の釣合い)}}$$

- q_e：軸力 k_e：伸び剛性

「あとは，ここが計算できれば」の計算

- $$\sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r};\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \pi^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) - 2\boldsymbol{g}^\top\boldsymbol{r} & \text{if } \boldsymbol{r}\le\boldsymbol{0}, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$
- $\pi^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})$ は コンプリメンタリエネルギー
- 簡単のため，トラスの場合は，

$$\pi^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) = \sum_{e=1}^{m}\frac{1}{2}\frac{1}{k_e}q_e^2 \quad \text{with} \sum_{e=1}^{m} q_e\boldsymbol{b}_e = \boldsymbol{p} + C_{\mathrm{n}}^\top\boldsymbol{r}$$

- 最適設計問題は，（→ 通常の非線形計画問題）

$$\inf_{\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^c}\ \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r};\boldsymbol{x}) \overset{\text{equiv}}{=} \begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^c}{\text{Min.}} & \displaystyle\sum_{e=1}^{m}\frac{1}{2}\frac{1}{k_e(x_e)}q_e^2 - 2\boldsymbol{g}^\top\boldsymbol{r} \\ \text{s. t.} & \displaystyle\sum_{e=1}^{m} q_e\boldsymbol{b}_e = \boldsymbol{p} + C_{\mathrm{n}}^\top\boldsymbol{r}, \\ & \boldsymbol{r}\le\boldsymbol{0}. \end{array}$$

トラスの場合の特殊な定式化　[Kočvara, Zibulevsky, & Zowe '98]

- 実は，別の定式化として，凸２次計画に帰着可能
- 最適設計問題：

$$\inf_{\boldsymbol{x}\in X} \underbrace{\sup_{\boldsymbol{u}:C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u}\le\boldsymbol{g}} \{2\boldsymbol{p}^{\top}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{\top}K(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\}}_{\text{(コンプライアンス)}}$$

- ミニマックス定理より，

$$\overset{\text{equiv}}{=} \quad \sup_{\boldsymbol{u}:C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u}\le\boldsymbol{g}} \inf_{\boldsymbol{x}\in X} \{2\boldsymbol{p}^{\top}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{\top}K(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\}$$

トラスの場合の特殊な定式化 [Kočvara, Zibulevsky, & Zowe '98]

- 実は，別の定式化として，凸２次計画に帰着可能
- 最適設計問題：

$$\inf_{x \in X} \underbrace{\sup_{u : C_{\mathrm{n}} u \le g} \{2 p^\top u - u^\top K(x) u\}}_{\text{(コンプライアンス)}}$$

- ミニマックス定理より，

$$\overset{\text{equiv}}{=} \sup_{u : C_{\mathrm{n}} u \le g} \underbrace{\inf_{x \in X} \{2 p^\top u - u^\top K(x) u\}}_{(x\ \text{に関する線形計画})}$$

  - X は，体積制約 と 断面積の非負制約
    - 端点は $(0, \dots, 0, V/l_e, 0, \dots, 0)$ の形
  - $u^\top K(x) u$ は x の線形関数 $\longrightarrow$ LP の最適性より，x を消去可

「特殊な定式化」との比較

- 最適設計問題：$\inf_{\boldsymbol{x} \in X} \pi(\boldsymbol{x})$
- コンプライアンス：$\pi(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{u}: C_{\mathrm{n}}\boldsymbol{u} \le \boldsymbol{g}} \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} \inf_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^c} L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x})$
  - Lagrange 関数：$L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x})$
- 提案手法は，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{r}$ の Lagrange 双対性：

$$\boxed{\inf_{\boldsymbol{x} \in X} \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} \inf_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^c} L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{x} \in X} \inf_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^c} \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x})}$$

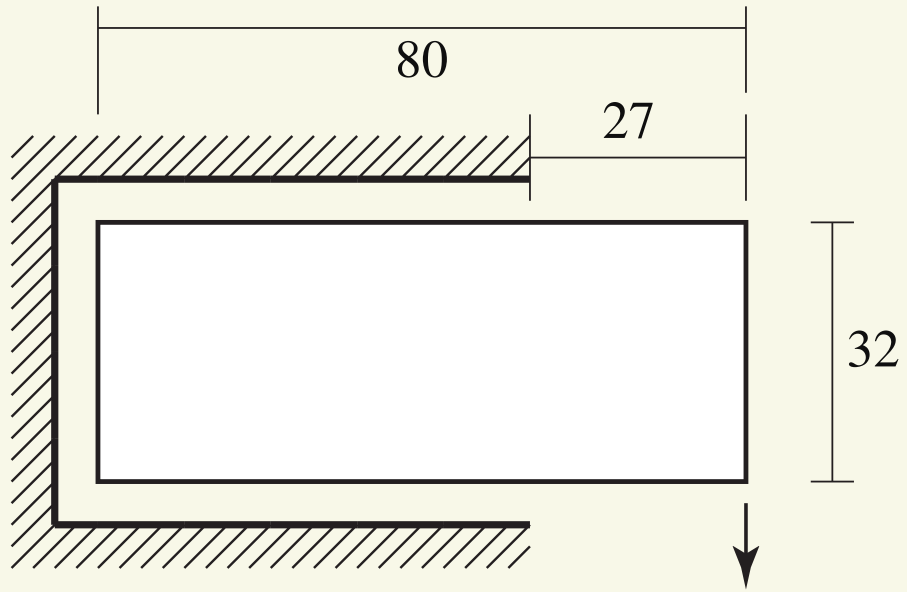
  - トラス以外でも可
- [Kočvara *et al.* '98] は，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{x}$ のミニマックス定理：

$$\boxed{\inf_{\boldsymbol{x} \in X} \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} \inf_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^c} L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n} \inf_{\boldsymbol{x} \in X} \inf_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^c} L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{x})}$$

  - 設計変数 $\boldsymbol{x}$ を消去
  - トラスの場合のみ可

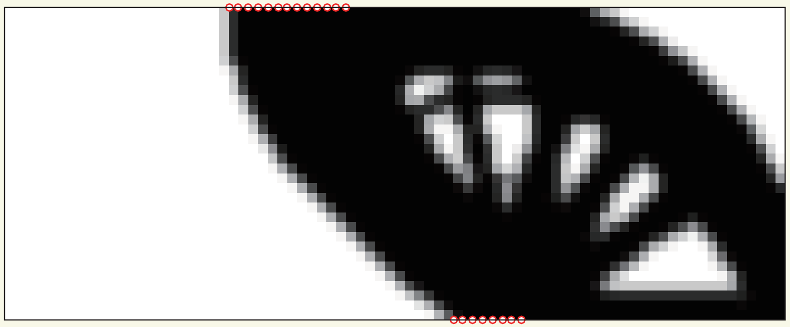
例題：連続体

- 問題設定

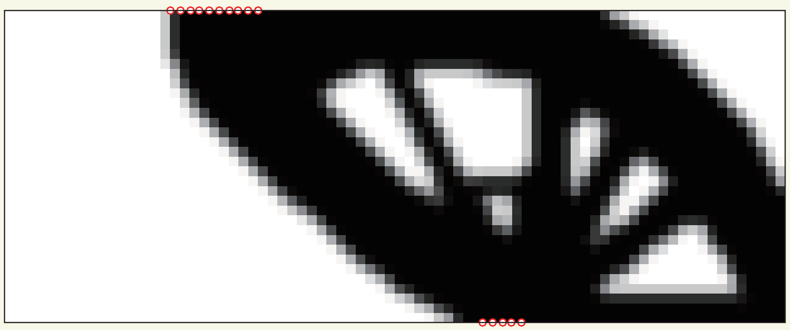


- ギャップ（三方）は一様
  - $g_j = 0, 2, 4, 6, 8$

例題：連続体

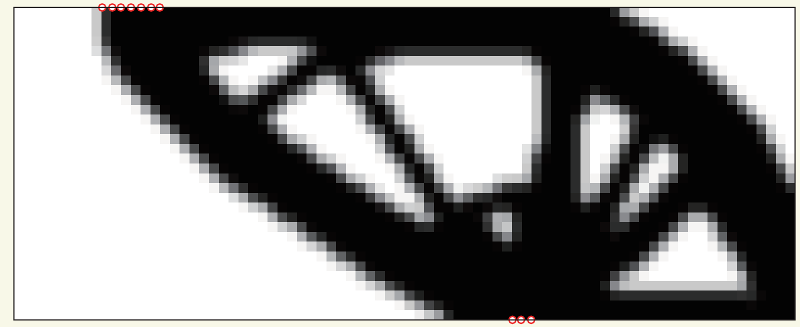


$g_j = 0$

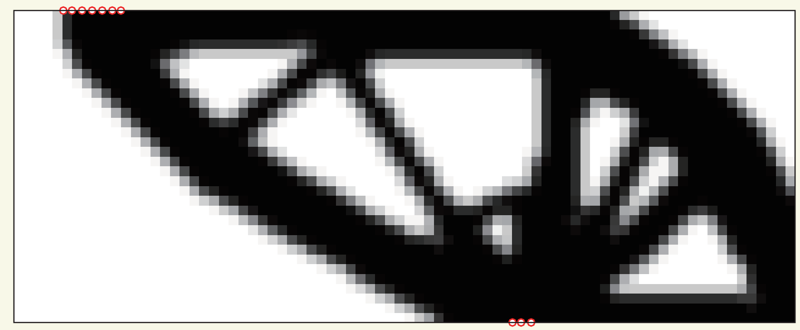


$g_j = 2$

$g_j = 4$



$g_j = 6$

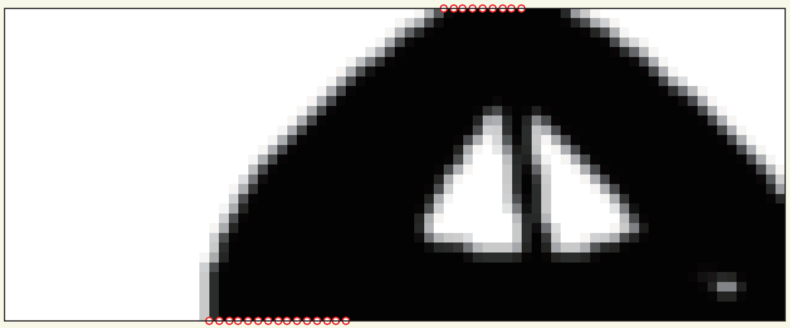


$g_j = 8$

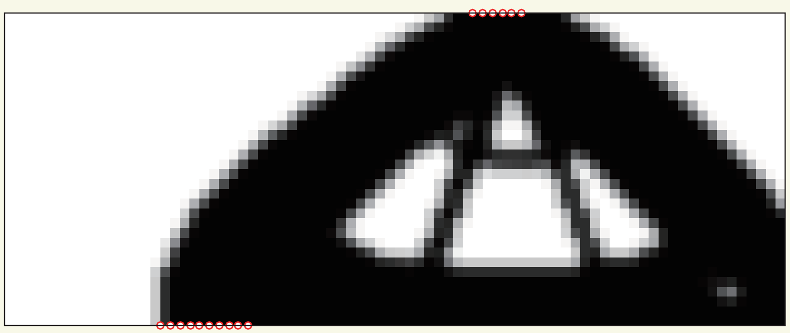
$g_j = 10$

- 外力は，右下隅，鉛直下向き

例題：連続体

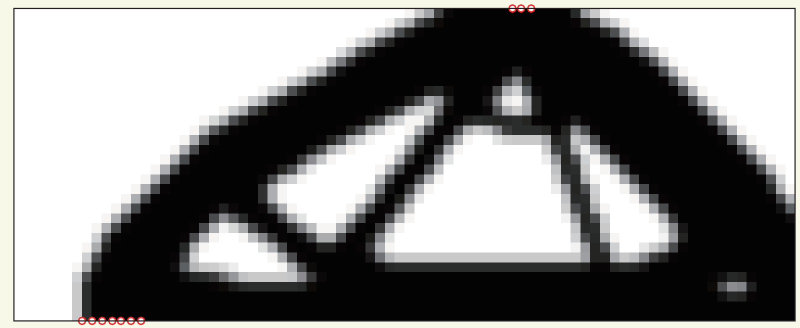


$g_j = 0$



$g_j = 2$

$g_j = 4$

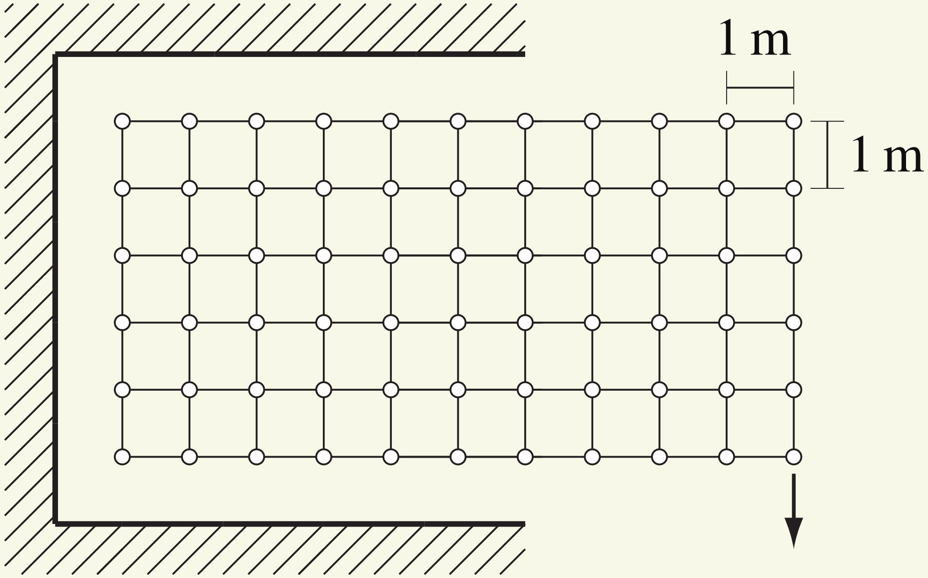


$g_j = 6$

- 外力は，右下隅，鉛直上向き

例題：トラス

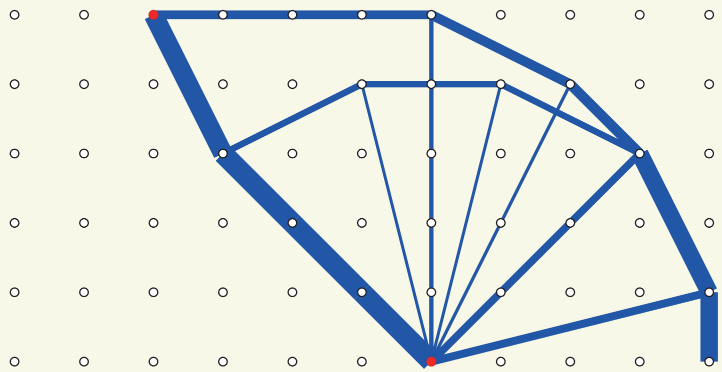
- 問題設定



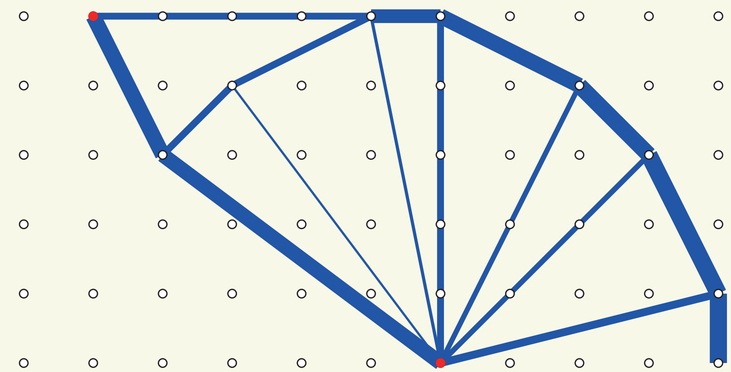
  - 実際は，任意の 2 点間に部材あり：1361 部材
- ギャップ（三方）は一様
  - $g_j = 0, 0.25, 0.5, 0.75\,\mathrm{mm}$

例題：トラス

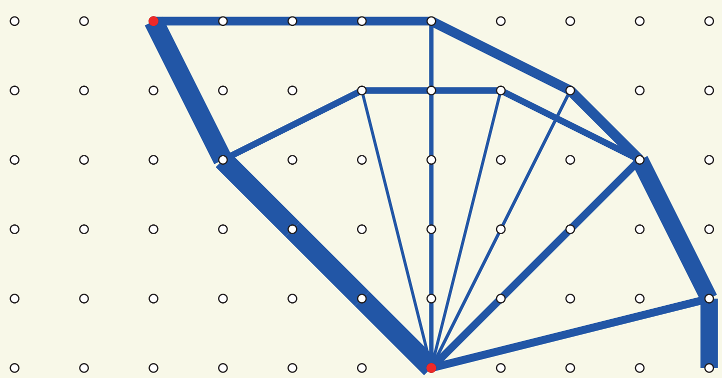
- 断面積は連続変数　→ 凸最適化問題　　　　CPLEX ver. 12.8.0



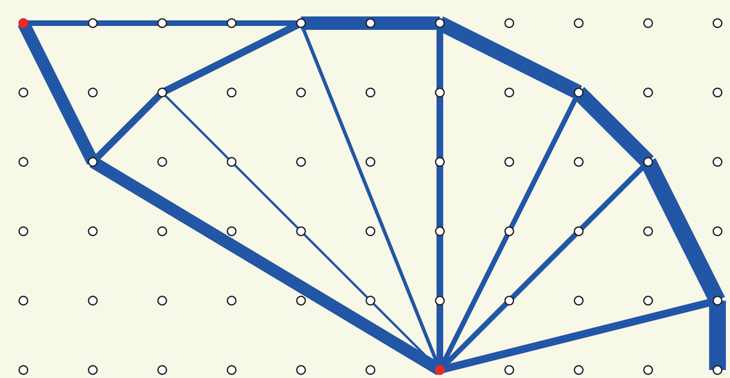
$g_j = 0$



$g_j = 0.5\,\mathrm{mm}$



$g_j = 0.25\,\mathrm{mm}$

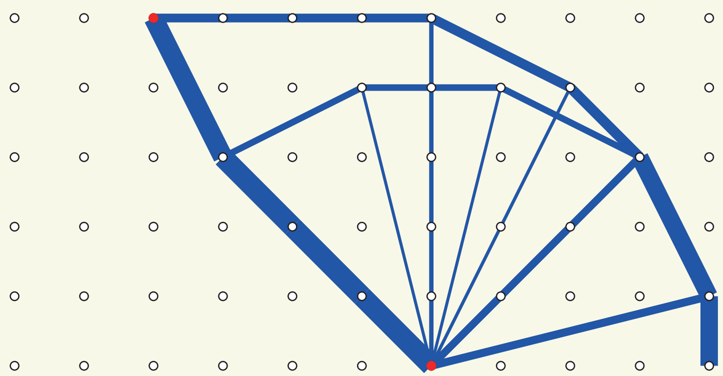


$g_j = 0.75\,\mathrm{mm}$

- 外力は，右下隅，鉛直下向き

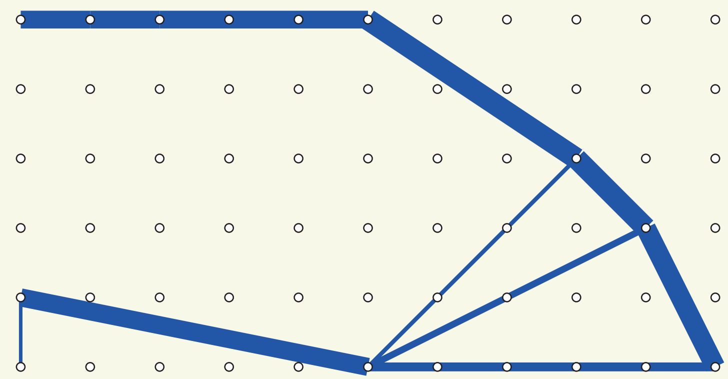
例題：トラス

- 断面積は連続変数　→ 凸最適化問題　　CPLEX ver. 12.8.0



$g_j = 0$

片側接触のとき

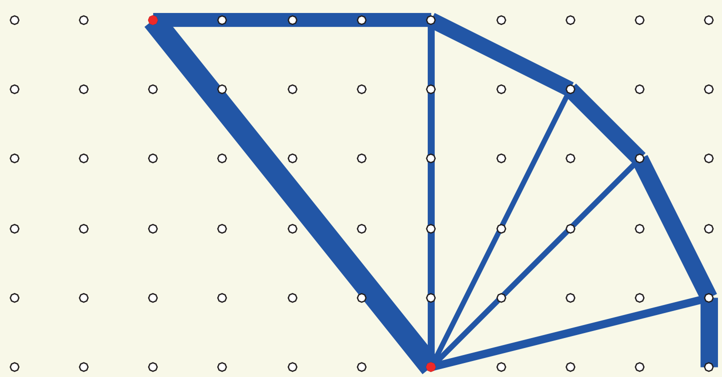


$g_j = 0$

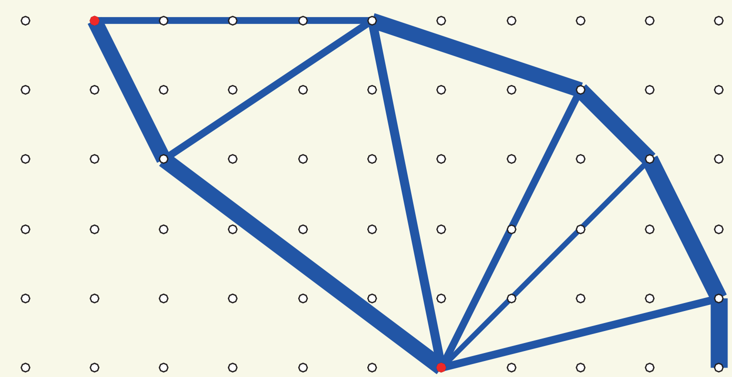
すべてローラー支持としたとき

例題：トラス

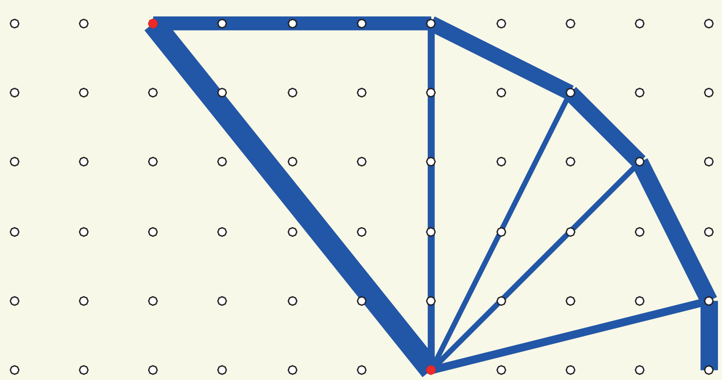
- 断面積は連続変数 CPLEX ver. 12.8.0
  - 細い部材排除 & 節点の次数 ≤ 5 $\longrightarrow$ 混合整数２次錐計画問題



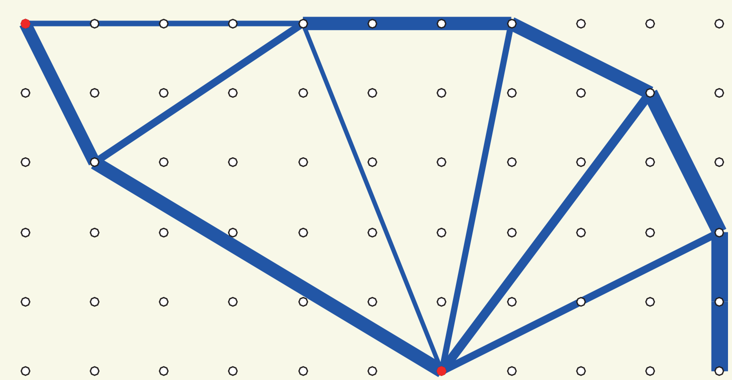
$g_j = 0$



$g_j = 0.5\,\mathrm{mm}$



$g_j = 0.25\,\mathrm{mm}$

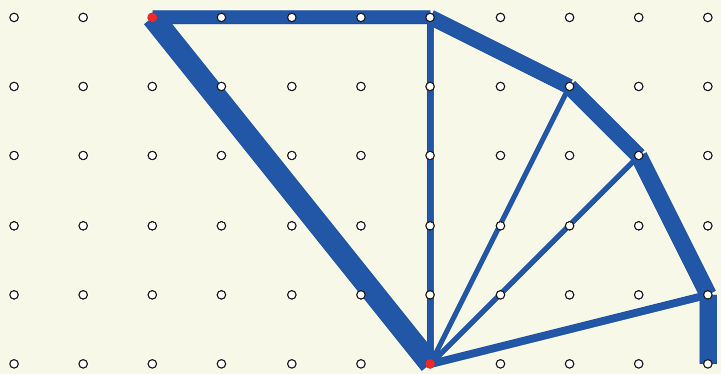


$g_j = 0.75\,\mathrm{mm}$

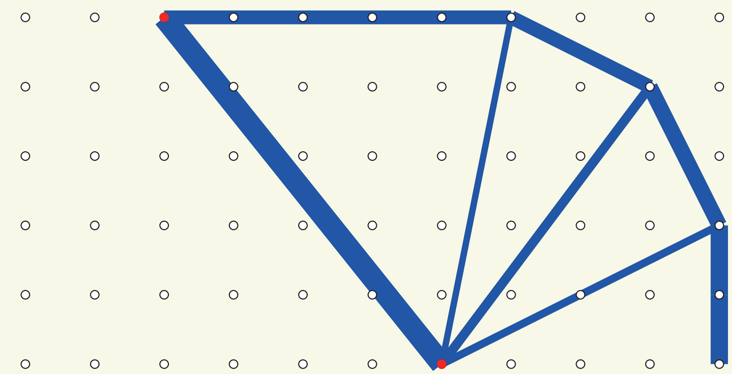
- 外力は，右下隅，鉛直下向き

例題：トラス

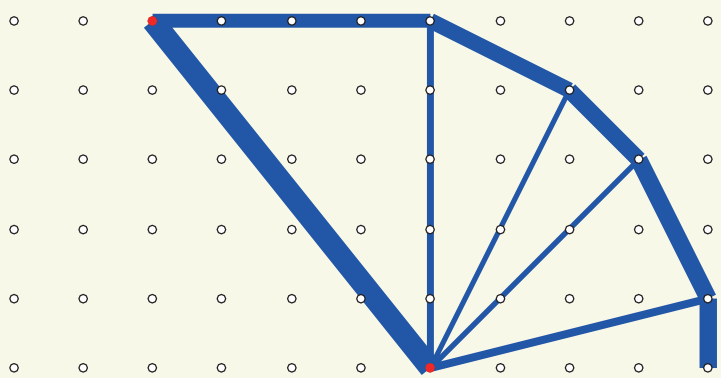
- 節点の次数制約



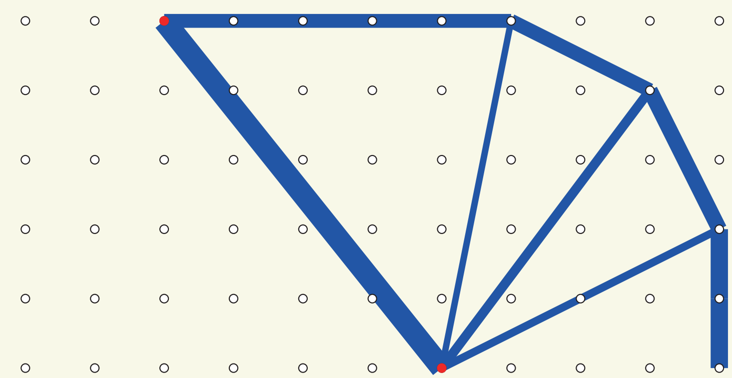
$\longleftrightarrow$



次数 ≤ 5, $g_j = 0$　　　次数 ≤ 4, $g_j = 0$



$\longleftrightarrow$

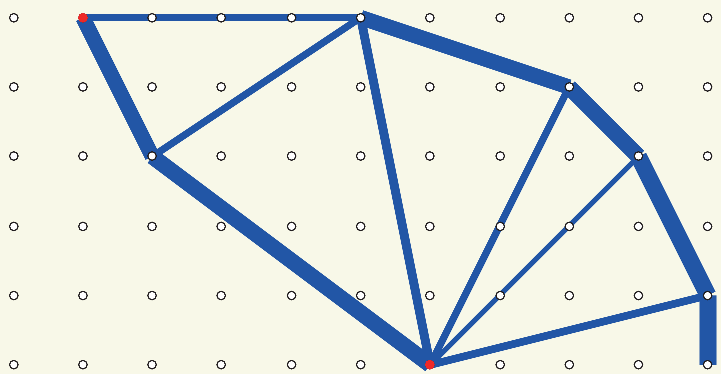


次数 ≤ 5, $g_j = 0.25\,\mathrm{mm}$　　　次数 ≤ 4, $g_j = 0.25\,\mathrm{mm}$

- 凸２次計画に帰着する方法 [Kočvara, Zibulevsky, & Zowe '98] は，設計変数 $\boldsymbol{x}$ を消去するので，このような制約は扱えない．

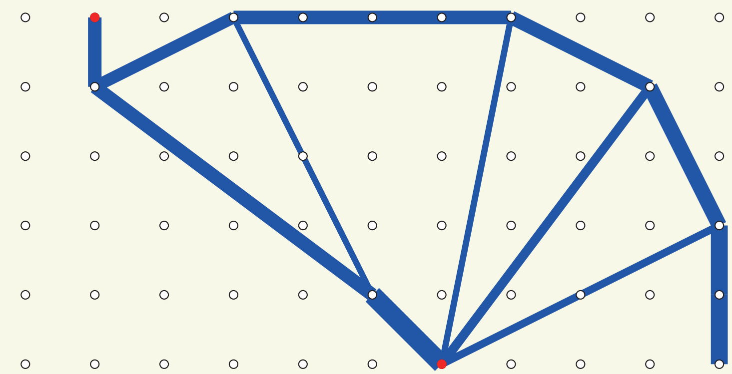
例題：トラス

- 節点の次数制約

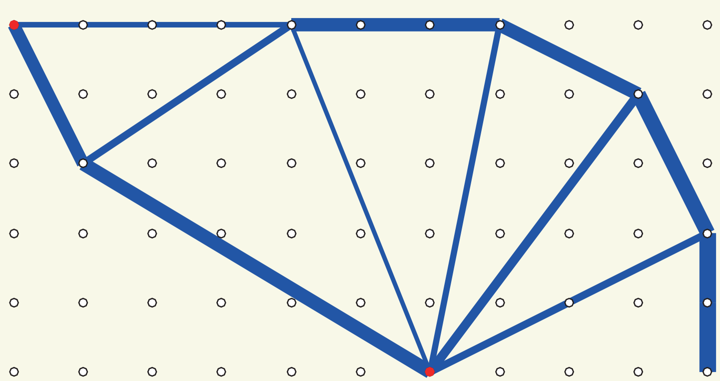


次数 ≤ 5, $g_j = 0.5\,\mathrm{mm}$

$\leftrightarrow$

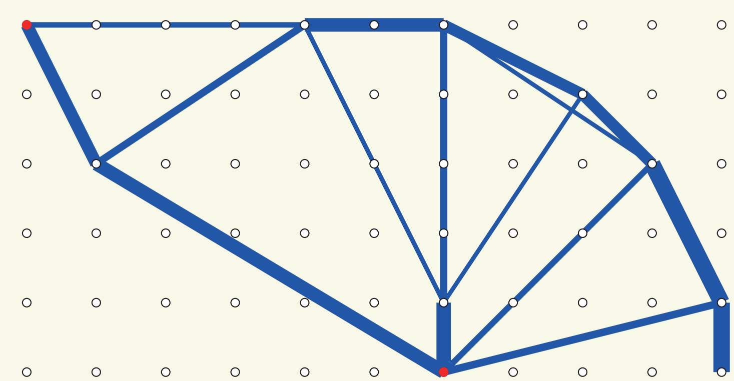


次数 ≤ 4, $0.5\,\mathrm{mm}$



次数 ≤ 5, $g_j = 0.75\,\mathrm{mm}$

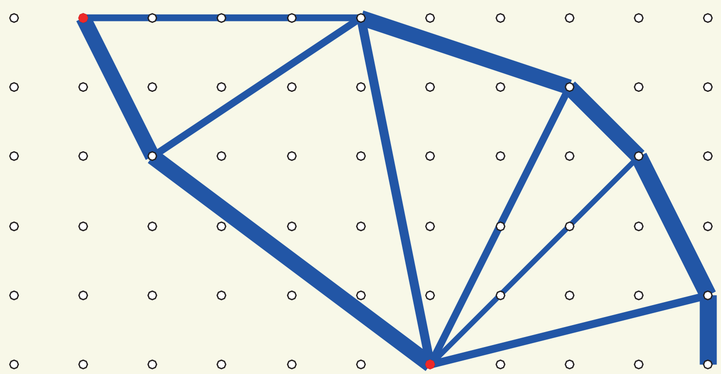
$\leftrightarrow$



次数 ≤ 4, $g_j = 0.75\,\mathrm{mm}$

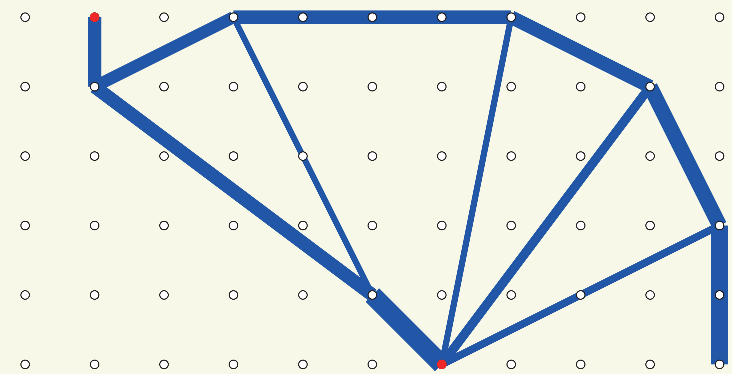
例題：トラス

- 節点の次数制約

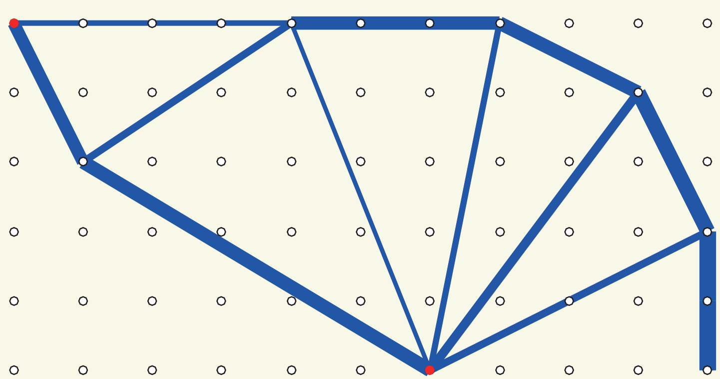


次数 ≤ 5, $g_j = 0.5\,\mathrm{mm}$

$\leftrightarrow$

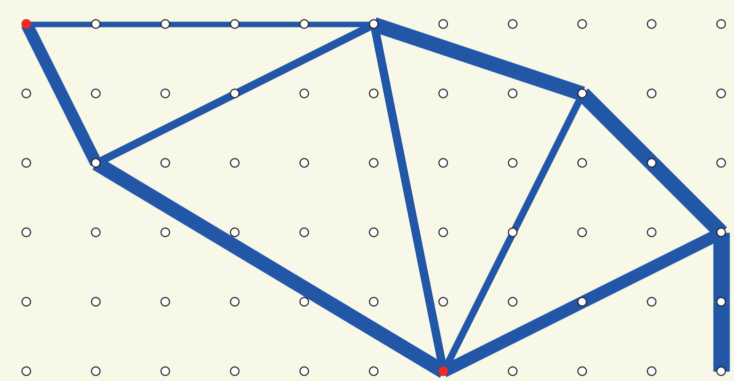


次数 ≤ 4, $0.5\,\mathrm{mm}$



次数 ≤ 5, $g_j = 0.75\,\mathrm{mm}$

$\leftrightarrow$



次数 ≤ 4, $g_j = 0.75\,\mathrm{mm}$
部材の交差もなし

まとめ

- 摩擦なしの接触問題
  - 線形相補性問題
  - $\longrightarrow$ 最適設計問題は，相補性制約付き
    - MPEC : 扱いが困難
- コンプライアンスの定義に，Lagrange 双対性を適用
  - 相補性制約なしの定式化
    - 通常の非線形計画
  - 設計変数を消去しない $\longrightarrow$ 種々の制約の付加が可

- Y. Kanno: “Exploiting Lagrange duality for topology optimization with frictionless unilateral contact,” *JJIAM*, to appear.