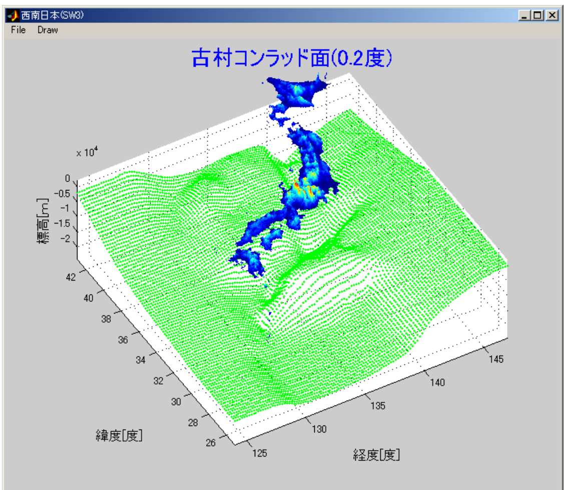
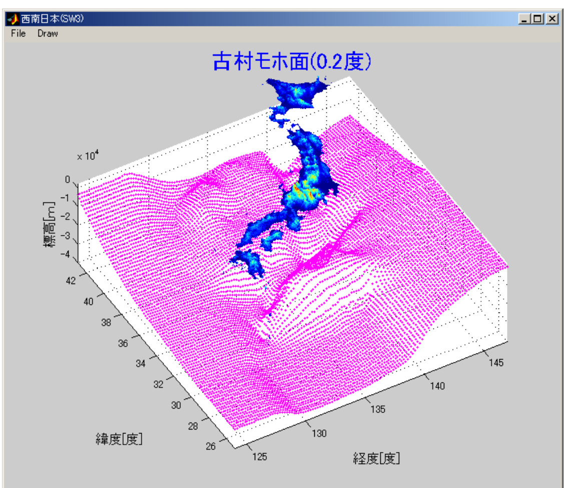
内点法による接触問題の求解に関する検討

宮村 倫司(日大), 寒野善博(東大),
大崎　純(京大)

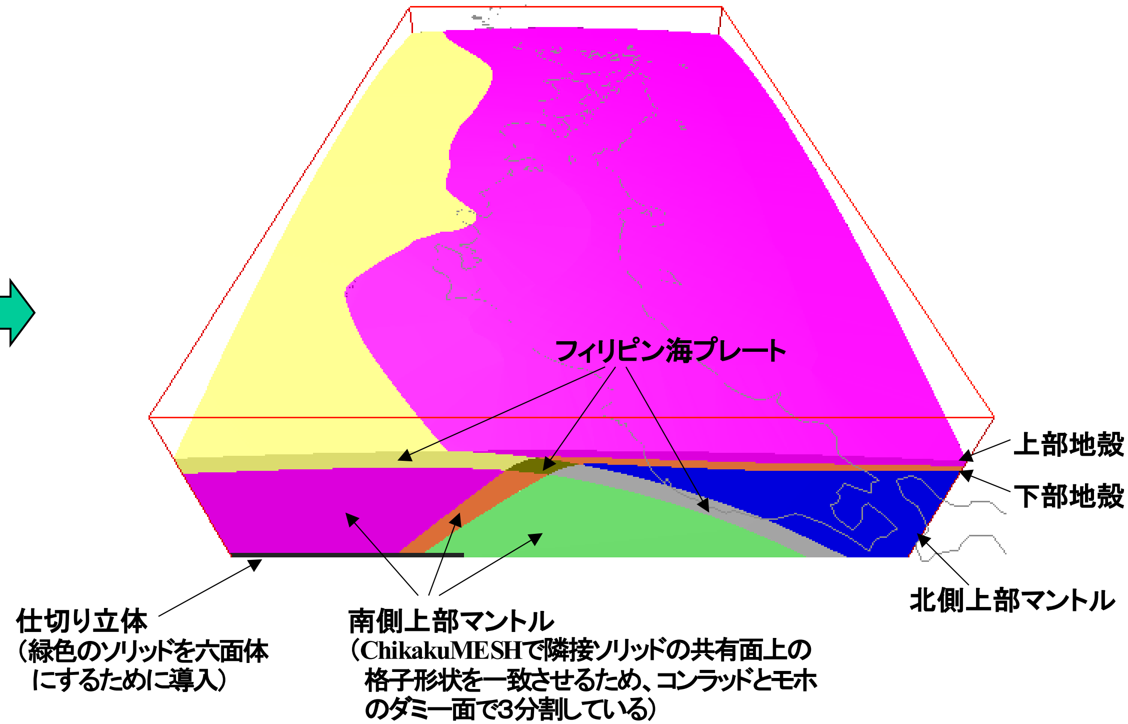
平成18年11月3日JSME　CMD

地殻構造のモデリング
CHIKAKUシステム（理研）



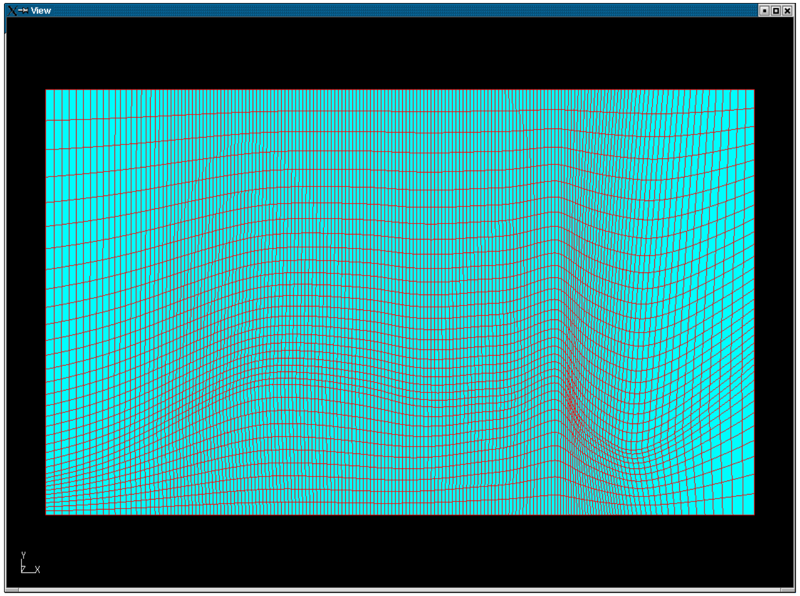


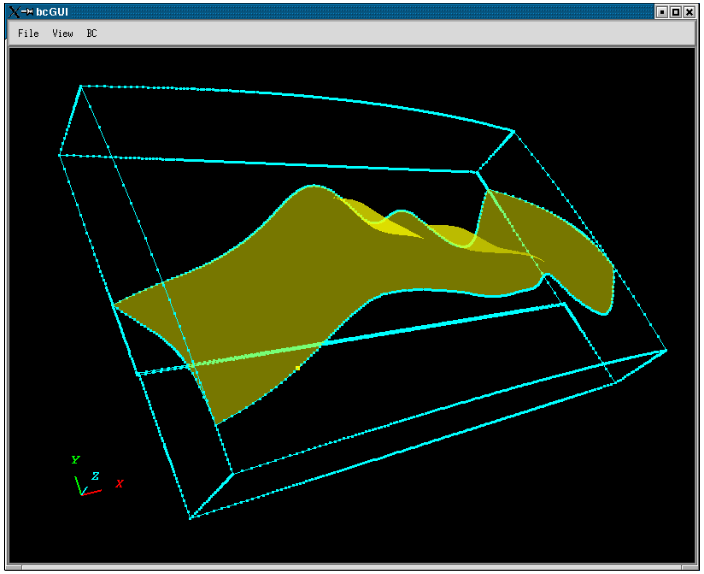
不連続面のデータ



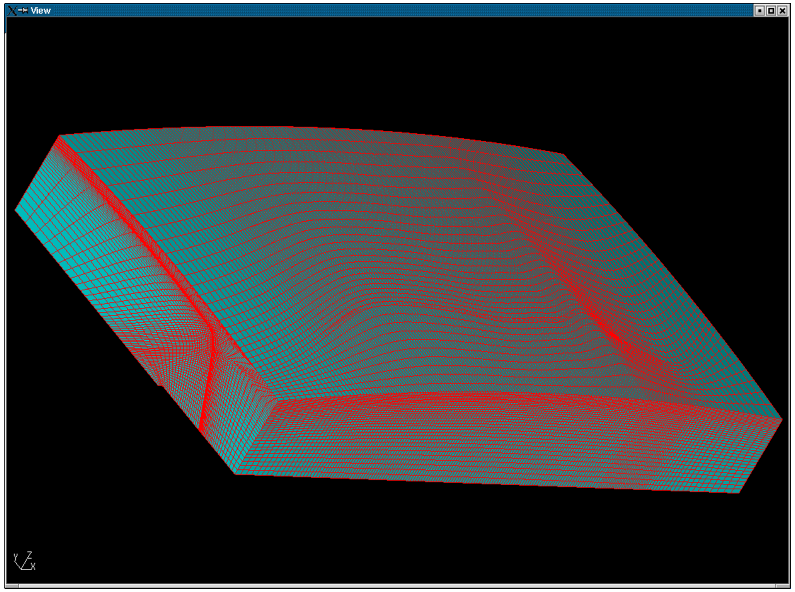
ソリッドモデル

地殻構造のメッシュ





プレート間境界面



地球シミュレータ，東大地震研，
CHIKAKU（理研，JAEA）

六面体，445440要素，
473900節点，1421700自由度

目次

- 接触問題（片側応力問題）
- 内点法
- 内点法の接触問題への適用
- 数値解析例

接触問題

ラグランジェ乗数

$$\mathbf{Ku} - \mathbf{T}^{T}\mathbf{r} = \mathbf{f}$$

釣り合い式

$$\mathbf{g} = \mathbf{Tu} - \mathbf{h}$$

ギャップ

$$\mathbf{r} \geq 0$$

接触しているときには圧縮

$$\mathbf{g} \geq 0$$

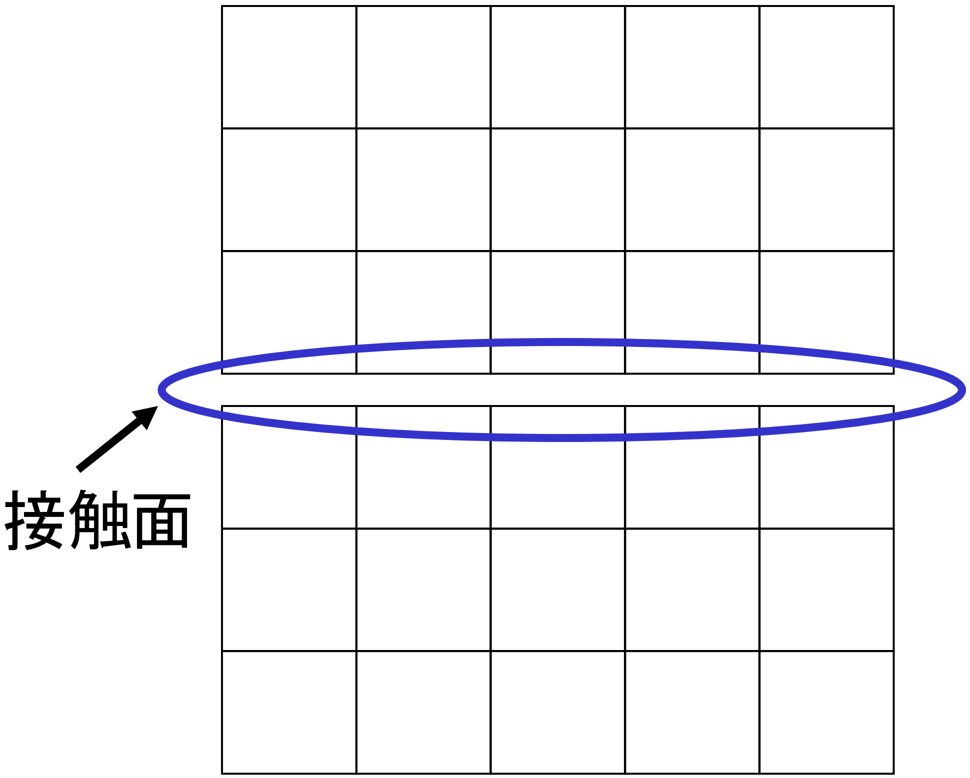
貫入しない

$$\mathbf{Gr} = \mathbf{0}$$

接触力またはギャップが0

片側応力問題，接触領域が未知

節点対節点接触モデル（FEM）



- 接触しそうなところがわかっている
- 接触面での表面メッシュパターンが同じになるようにメッシュを切る
- 節点同士の接触のみを考える
- 地殻構造のメッシュにもこのモデルが適用できる

最小化問題への変換

目的関数: $\frac{1}{2}\mathbf{u}^{T}\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}^{T}\mathbf{u}$ ⇨ 最小化

条件:

$\mathbf{g} = \mathbf{T}\mathbf{u} - \mathbf{h}$

$\mathbf{g} \geq 0$

この問題のKarush-Kuhn-Tuchker（KKT）条件 が元の問題

内点法

- 数理計画法
- 不等式制約条件を伴う問題の効率的解法
- 対数障壁関数を導入
- 実行可能多面体の内部を通って最小解に到達する
- 大規模な問題も解かれている

内点法の接触問題への適用

- 接触･非接触を試行錯誤法で決めると収束しないことがある
- 等式標準形二次計画問題に変換

  ⇒変数が2倍以上になる
- 主内点法を直接適用

対数障壁関数の導入

目的関数: $\frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} - \mu\sum_{i=1}^{n_c}\log g_i \Rightarrow$ 最小化

μを段々小さくする⇒

activeでない制約条件の効果はなくなる

条件:

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}\mathbf{u} - \mathbf{h}$$

$$\mathbf{g} > 0$$

Lagrange関数:

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} - \mu\sum_{i=1}^{n_c}\log g_i + \mathbf{r}^{\mathrm{T}}(\mathbf{g} - \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{h})$$

最適性条件
（Lagrange関数の停留条件）

$$\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{r} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}\mathbf{u} - \mathbf{h}$$

$$\mathbf{g} > 0$$

$$\mathbf{G}\mathbf{r} = \mu\,\mathbf{e}$$

対数障壁関数の二次近似

$$\mathbf{p}(\mathbf{g}) = -\mu \sum_{i=1}^{n_c} \log g_i$$

対数なので非線形

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{q}^k(\Delta \mathbf{g}) = \mathbf{p}(\mathbf{g}^k) - \mathbf{e}^{\mathrm{T}} \mathbf{G}_k^{-1} \Delta \mathbf{g} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{g}^{\mathrm{T}} \mathbf{G}_k^{-2} \Delta \mathbf{g}$$

二次近似

$\left(\mathbf{u}^k, \mathbf{g}^k\right)$ において二次近似

目的関数: $\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\left(\mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u}\right) - \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u}\right) + \mu\,\mathbf{q}^k\left(\Delta\mathbf{g}\right)$

⇨ 最小化

条件:

$$\Delta\mathbf{g} = \mathbf{T}\Delta\mathbf{u}$$

$$\mathbf{g}^k + \Delta\mathbf{g} > 0$$

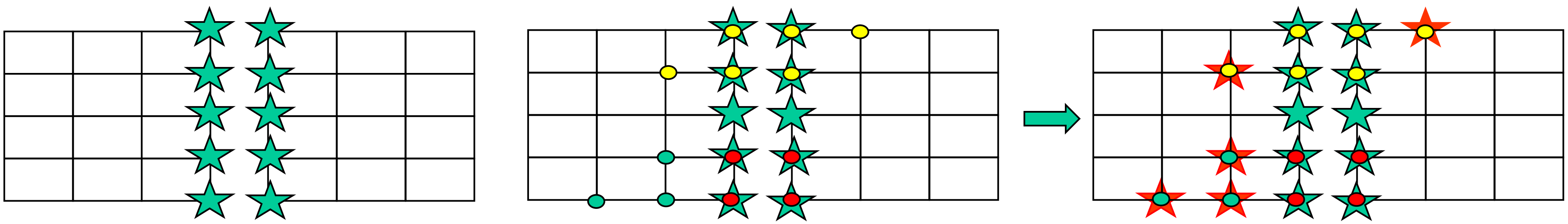
二次近似のLagrange関数の停留条件

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} & -\mathbf{T}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{O} & \mu \mathbf{G}_k^{-2} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{T} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{g} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}\mathbf{u}^k + \mathbf{f} \\ \mu \mathbf{G}_k^{-1}\mathbf{e} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

係数行列はスパース

$\mathbf{g}^k + \Delta \mathbf{g} > 0$ は無視

多点拘束条件(MPC)を考慮した領域分割法



領域間境界自由度

MPCに関係した節点

新しい領域間境界自由度

シュアコンプリメント

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^{T} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{B} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_{B} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix}$$

Lagrange 乗数

各部分領域の内部のMPCはなくなる

アルゴリズム（初期化）

$\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$

ギャップを計算

$\mu = \gamma\mu^0$ として

$\Delta\mathbf{u}$ を求め $\mathbf{u}^1 = \Delta\mathbf{u}$

アルゴリズム（反復）

ギャップを計算する

$\mu = \gamma\mu^k$ として $\Delta\mathbf{u}$ を求める

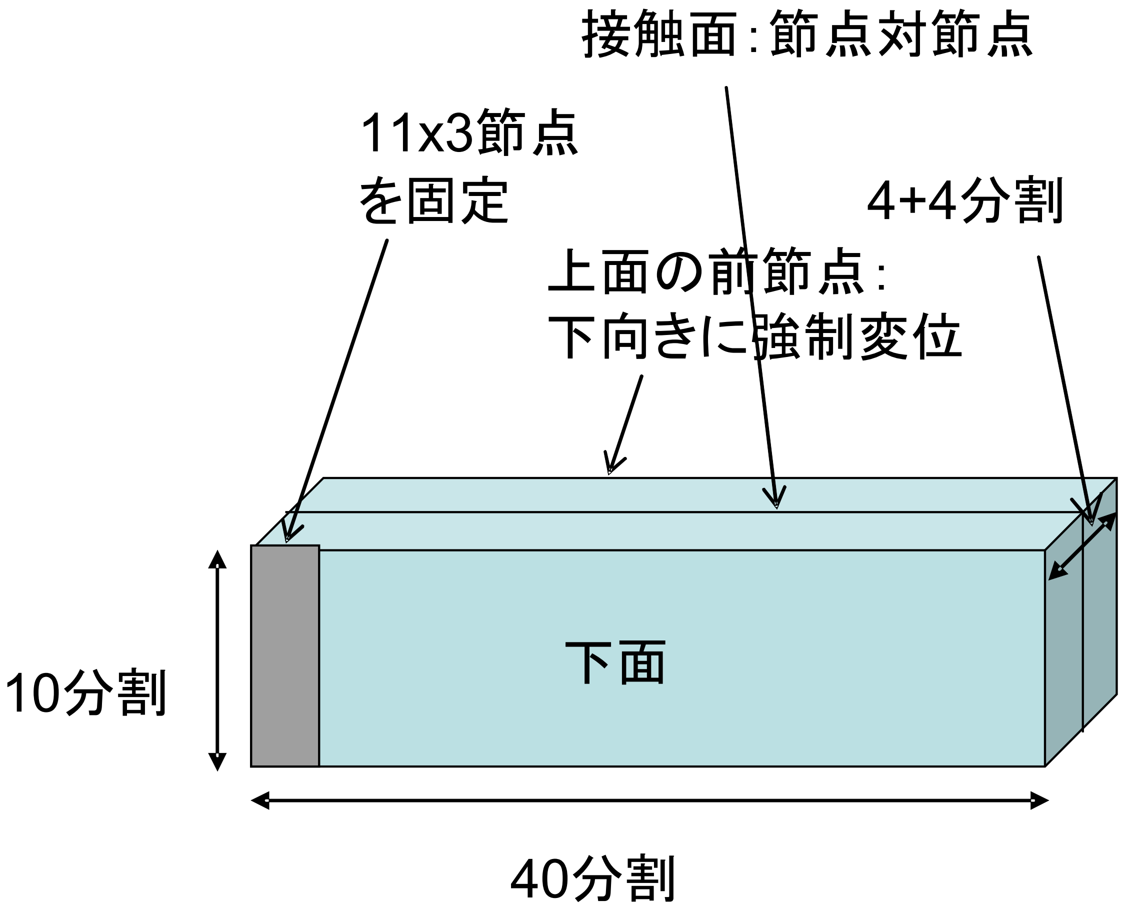
$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \alpha\Delta\mathbf{u}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} - \mu\sum_{i=1}^{n_c}\log g_i$$

を最小化するようにαをラインサーチ＋中点法で決める

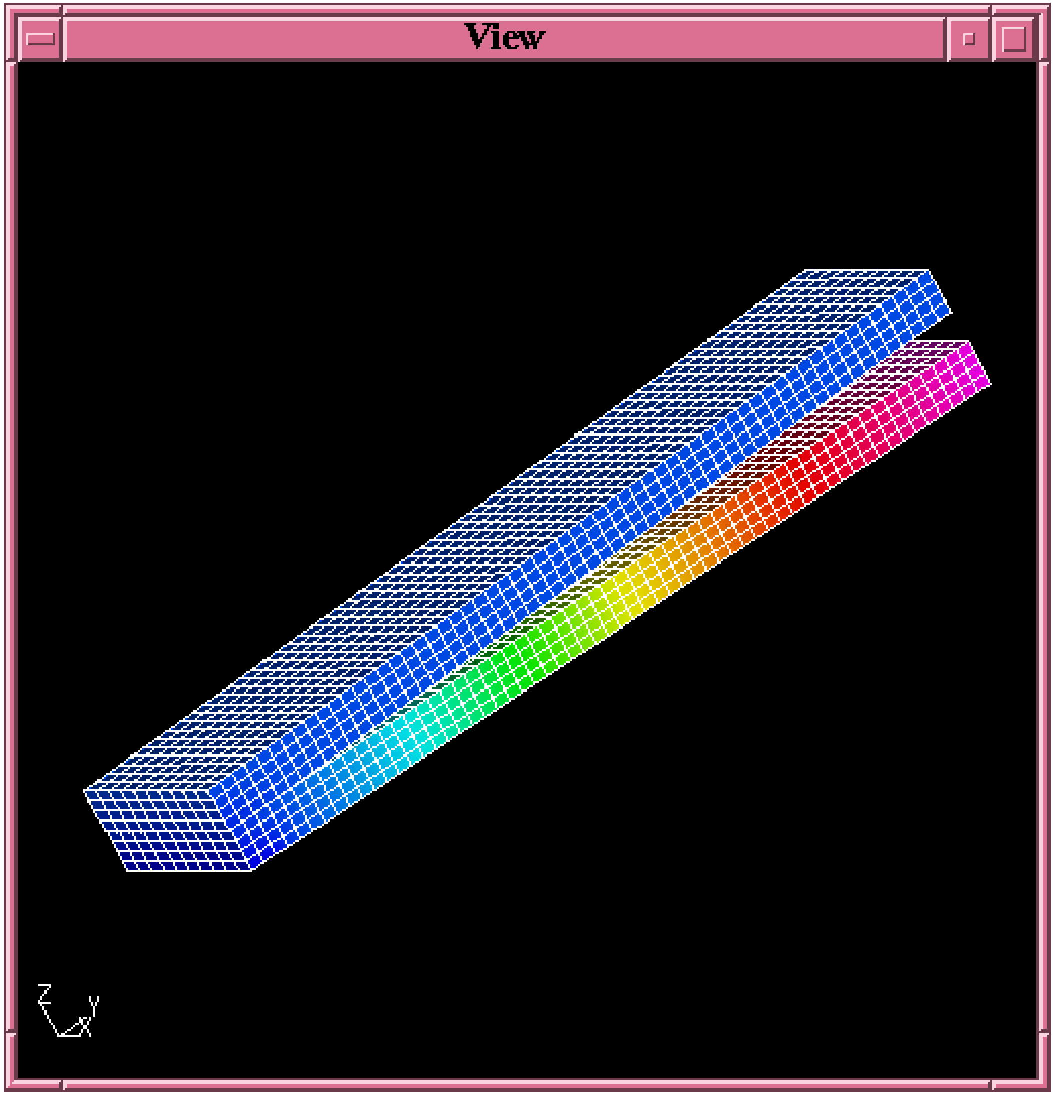
$$\mu^{k+1} = \mu^k - \beta(\mu^k - \mu) \qquad \begin{array}{l} \alpha > 1 \Rightarrow \beta = 1 \\ \alpha \le 1 \Rightarrow \beta = \alpha \end{array}$$

数値解析例

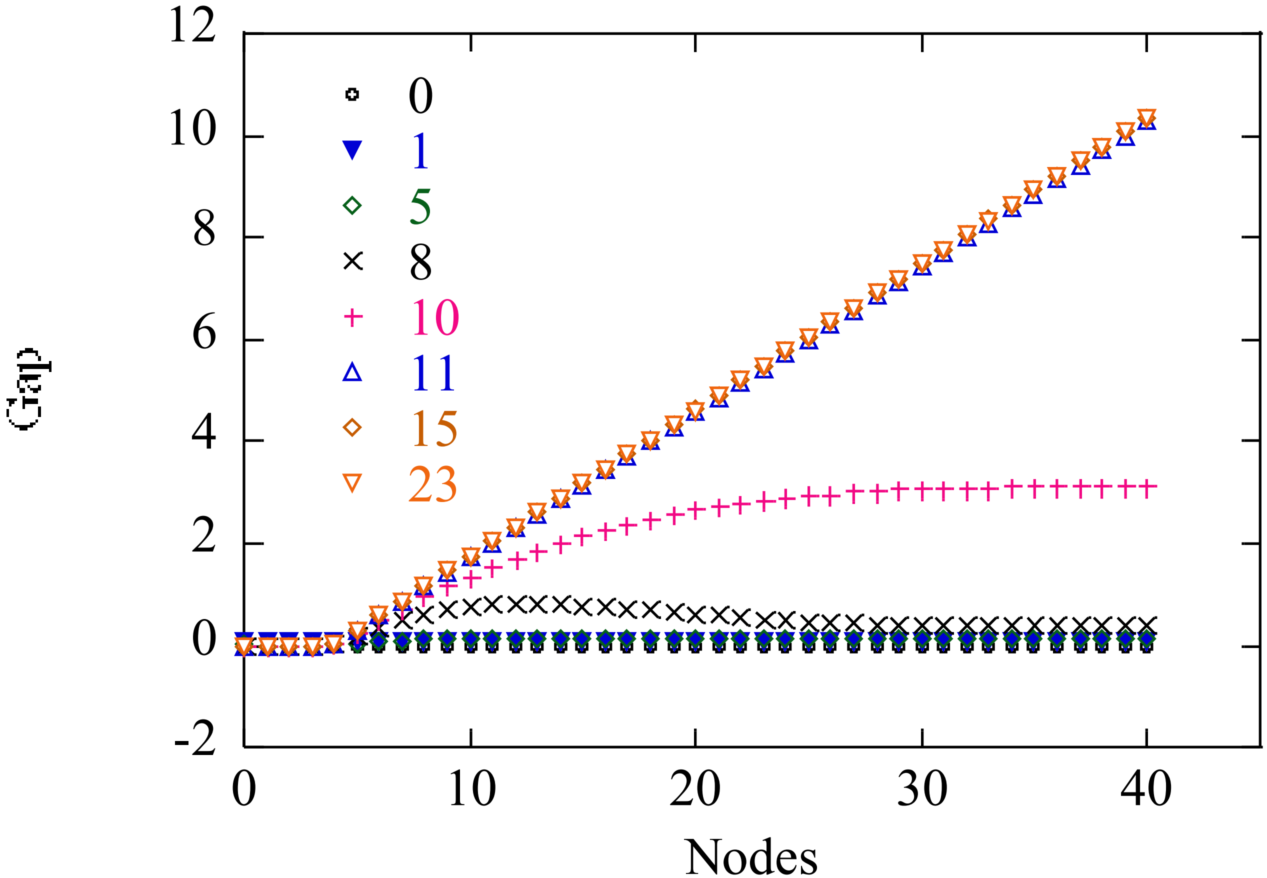


初期ギャップが0なので，ここでは，微小なギャップ（1.e-8）のときに接触と判定

例題の計算結果

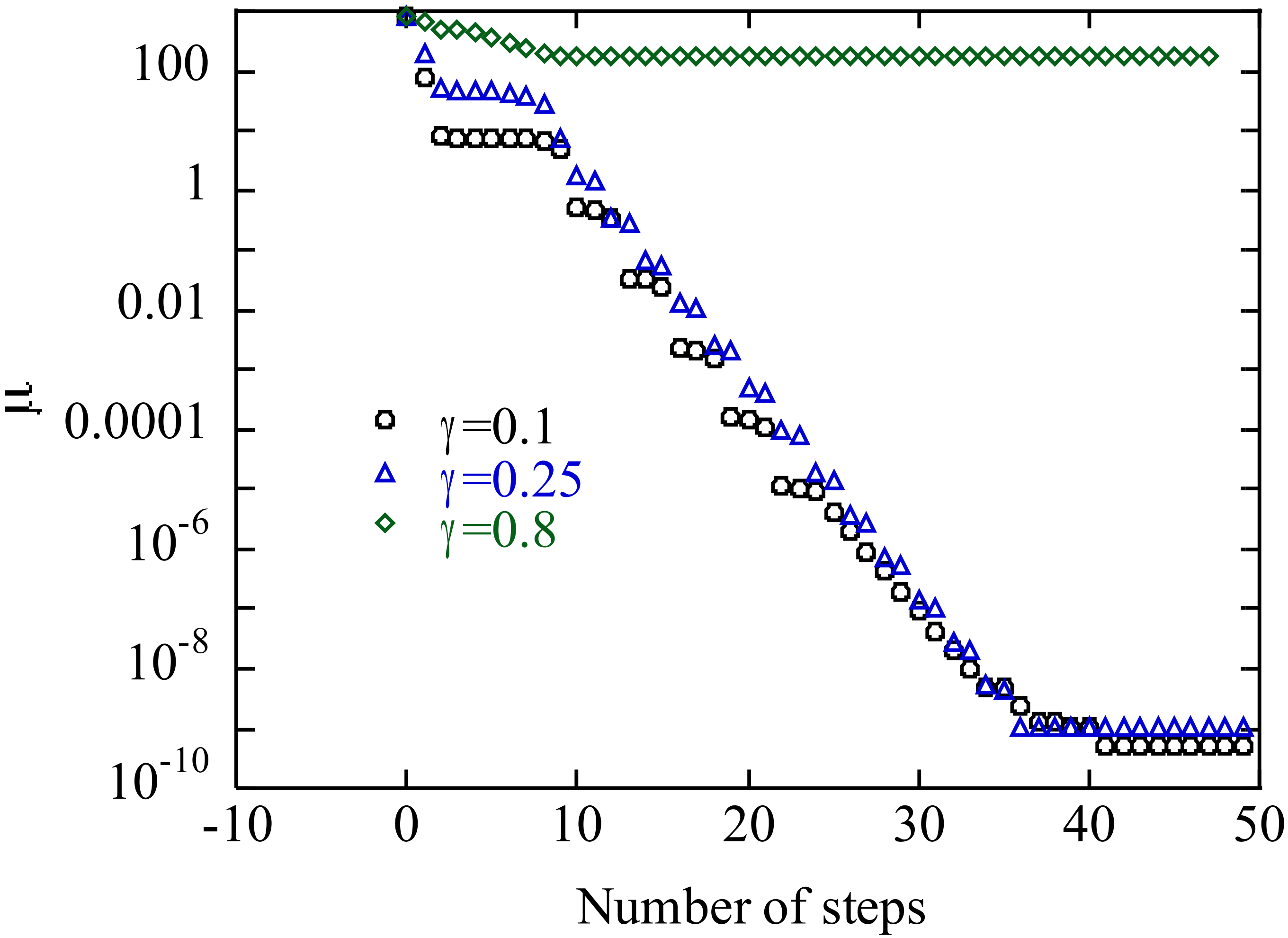


ギャップの収束の様子



試行錯誤法では27反復

μの収束の様子



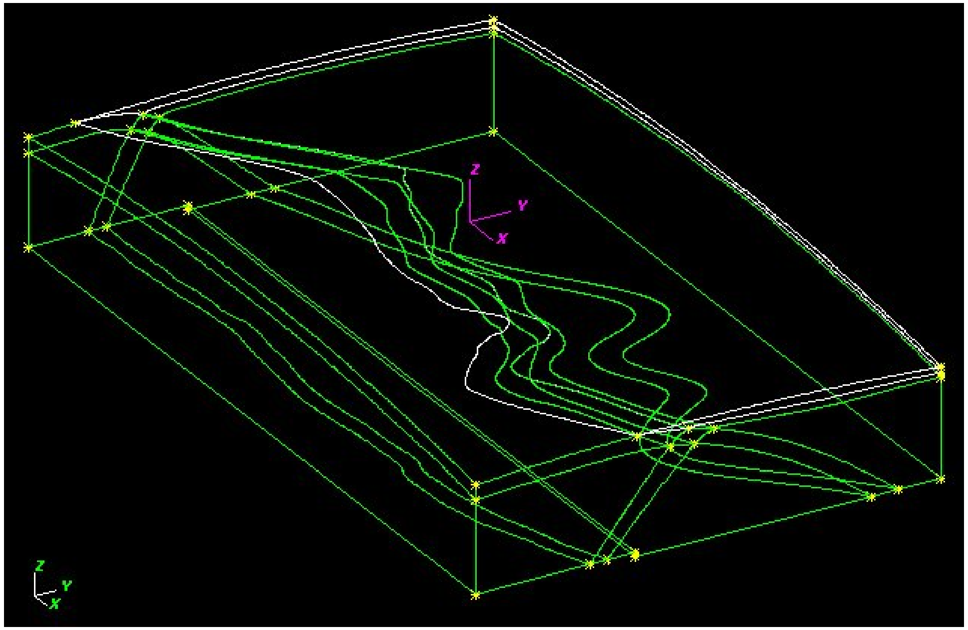
100
1
0.01
0.0001
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
μ
-10
0
10
20
30
40
50
Number of steps
γ=0.1
γ=0.25
γ=0.8

おわりに

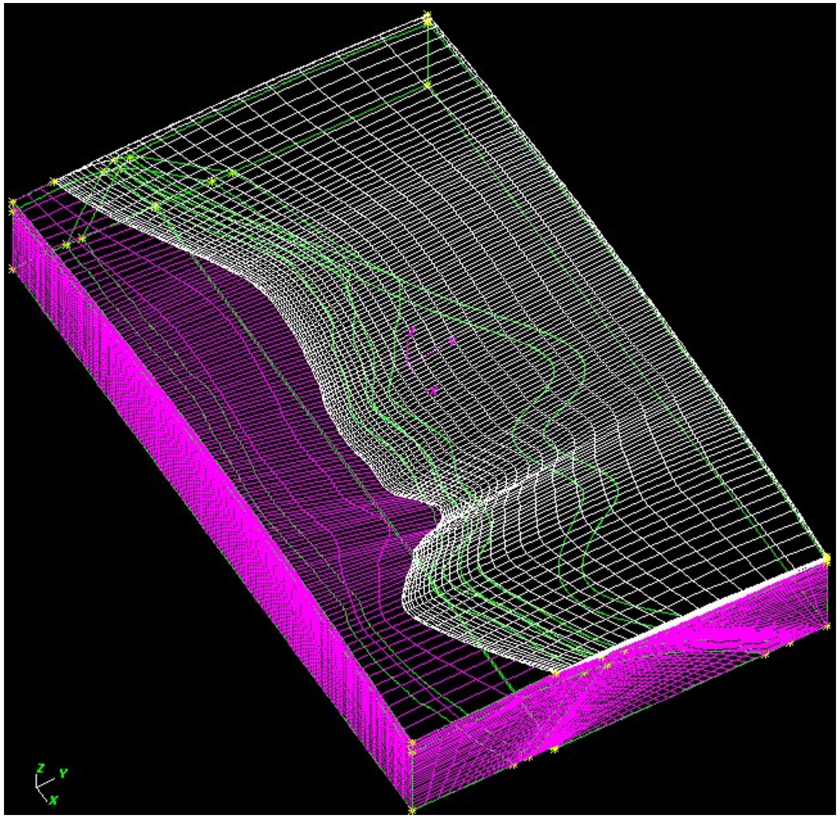
- 接触問題に主内点法を直接適用
- 数値解析例
- 試行錯誤法よりも反復回数が少ない

- 提案した定式化の収束性は？
- 初期解の設定（初期解ではギャップが大きい方がよい？）

六面体メッシュ生成（日本原子力機構）



IGESデータのインポート



地球シミュレータおよび東大地震研のプロジェクトにおいて作成

西南日本メッシュ（ディスロケーション解析用）