

不確定な外力を受けるトラスの 大域的な位相最適化手法

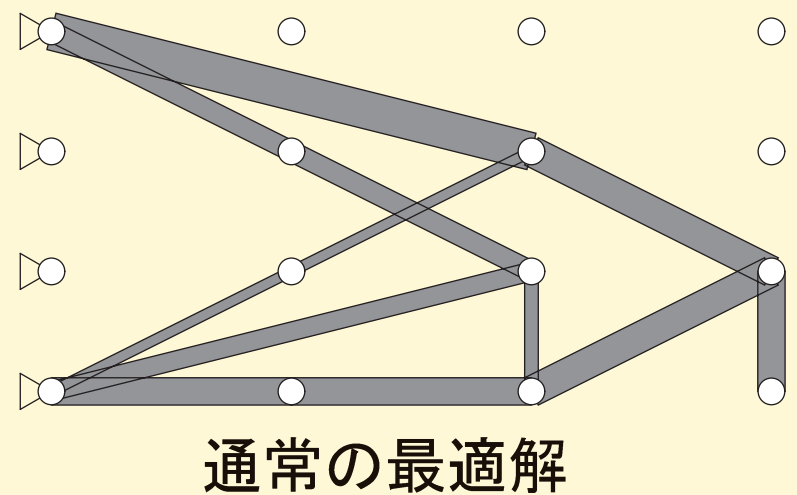
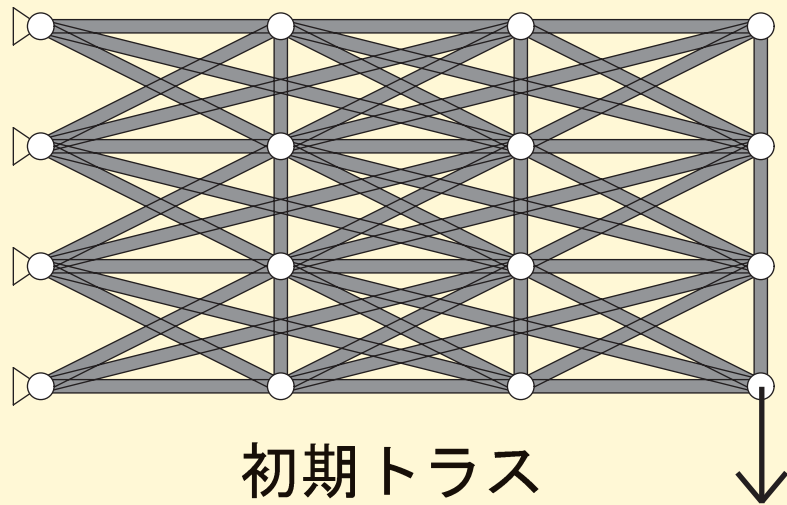
米倉 一男[†] 寒野 善博[‡]

[†](株) IHI

[‡] 東京大学大学院 (数理情報学専攻)

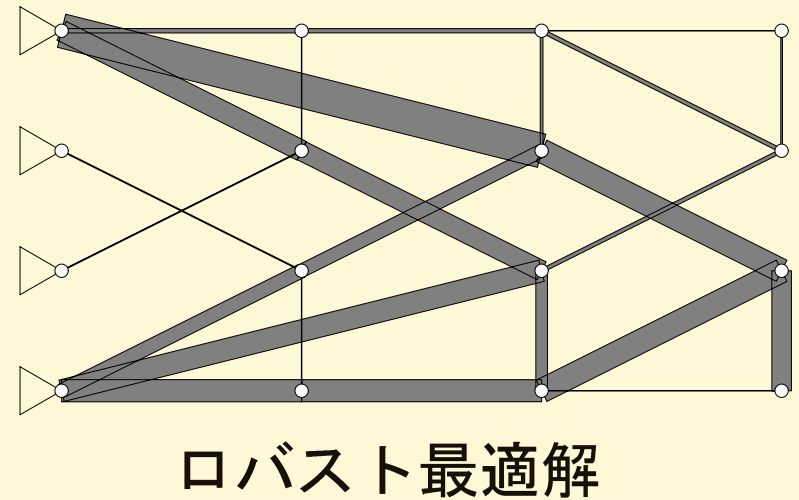
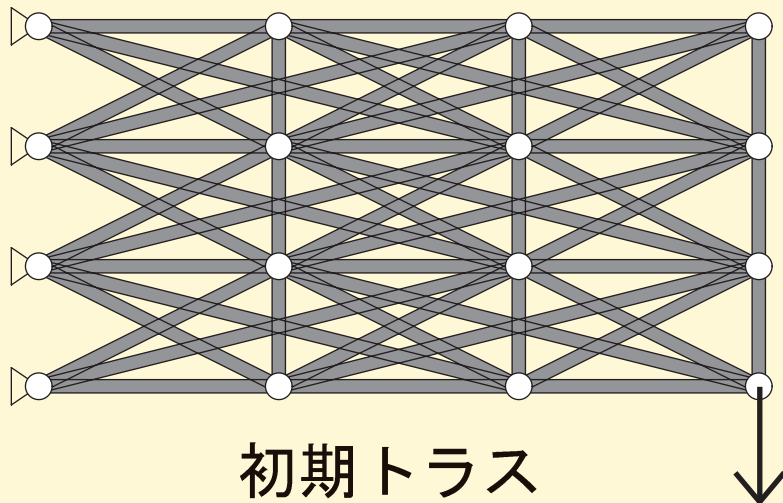
動機：ロバスト最適化

- トラスのコンプライアンス最小化
- 単一荷重では，最適解はしばしば不安定
- → ロバスト最適化が重要



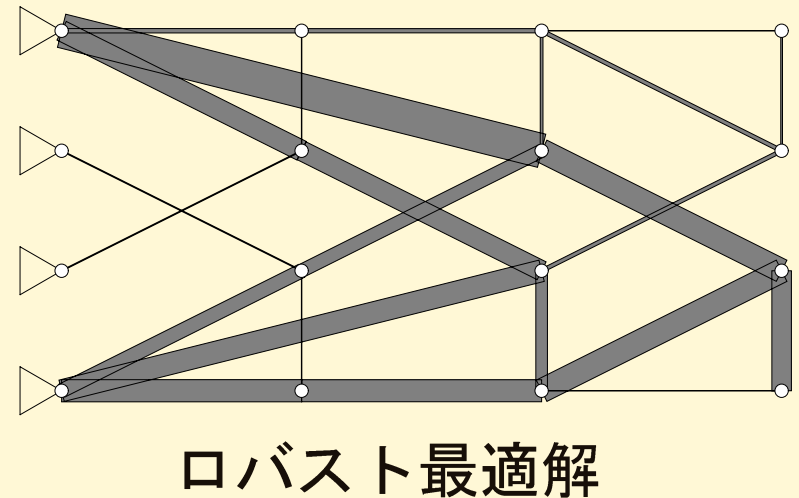
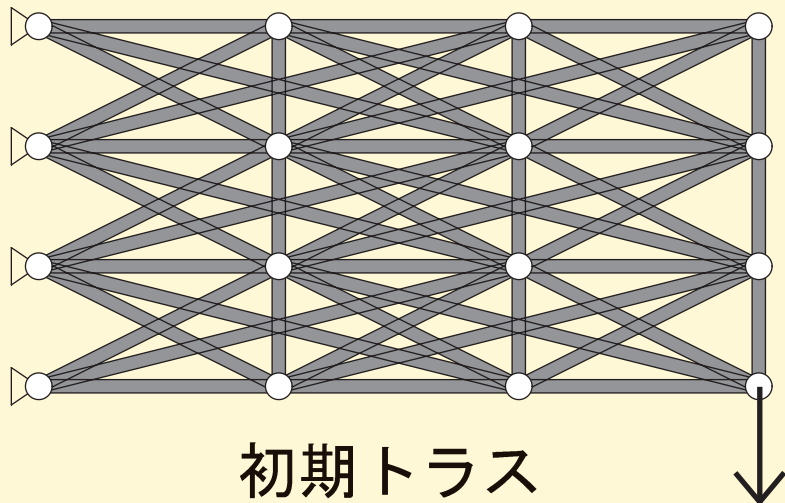
動機：ロバスト最適化

- トラスのコンプライアンス最小化
- 全ての節点に不確定外力を想定 [Ben-Tal & Nemirovski 97]
- — コンプライアンスの最大値を最小化する



動機：ロバスト最適化

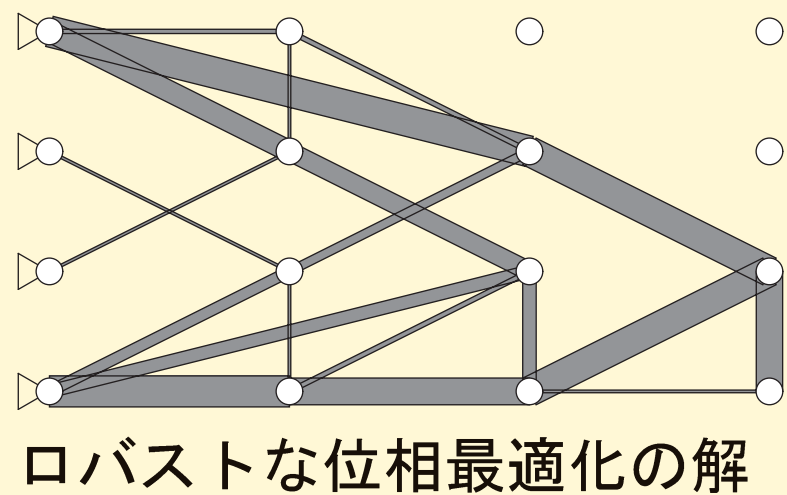
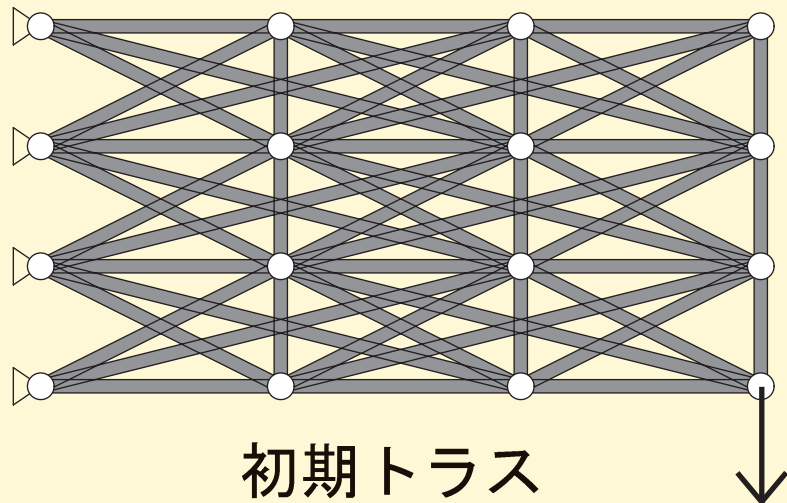
- トラスのコンプライアンス最小化
- 全ての節点に不確定外力を想定 [Ben-Tal & Nemirovski 97]
- — コンプライアンスの最大値を最小化する



- 得られる解は安定
- 節点集合は変化しない ⇒ 位相は (必ずしも) 最適化されない

動機：ロバスト最適化

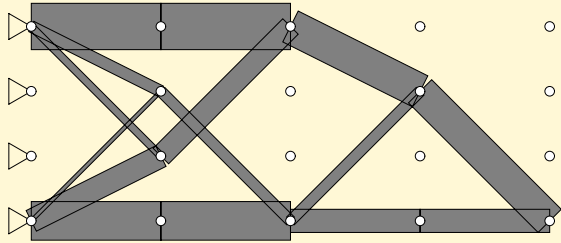
- トラスのコンプライアンス最小化
- 全ての節点に不確定外力を想定 [Ben-Tal & Nemirovski 97]
- — コンプライアンスの最大値を最小化する



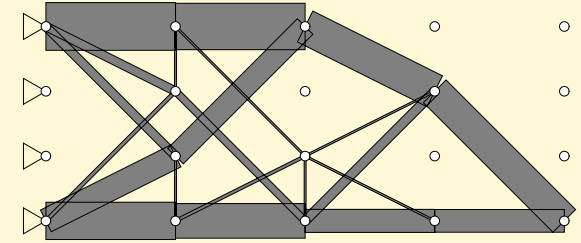
- 位相の変化を考慮した
ロバスト最適化問題の定式化・解法を提案する

動機：ロバスト最適化

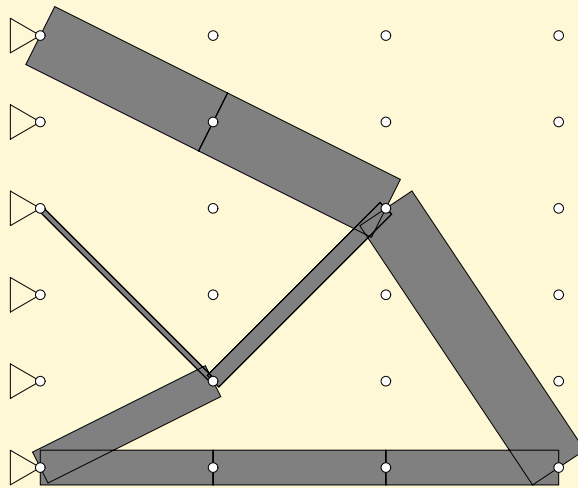
- 例えば...



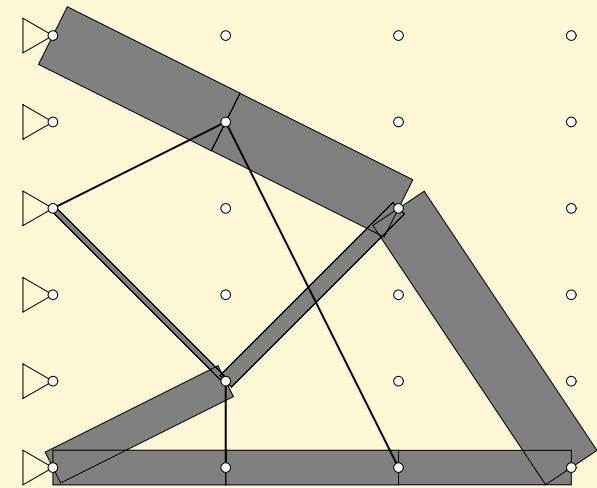
通常の位相最適化



ロバスト位相最適化



通常の位相最適化



ロバスト位相最適化

- ロバスト最適解は **必ず安定**

不確定な外力を受けるトラスの大域的な位相最適化手法

コンプライアンス最適化

- コンプライアンス

$$c(\mathbf{a}; \mathbf{f}) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n} \{2\mathbf{f}^T \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{K}(\mathbf{a}) \mathbf{u}\}$$

- \mathbf{a} : 断面積, $\mathbf{K}(\mathbf{a})$: 剛性行列, \mathbf{u} : 変位, \mathbf{f} : 外力

コンプライアンス最適化

- コンプライアンス

$$c(\mathbf{a}; \mathbf{f}) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n} \{2\mathbf{f}^T \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{u}\}$$

- \mathbf{a} : 断面積, $\mathbf{K}(\mathbf{a})$: 剛性行列, \mathbf{u} : 変位, \mathbf{f} : 外力

- コンプライアンス最小化 (\mathbf{f} は固定)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{a}} \quad & c(\mathbf{a}; \mathbf{f}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a} \geq \mathbf{0}, \quad v(\mathbf{a}) \leq \bar{V} \end{aligned}$$

コンプライアンス最適化

- コンプライアンス

$$c(\mathbf{a}; \mathbf{f}) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n} \{2\mathbf{f}^T \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{K}(\mathbf{a}) \mathbf{u}\}$$

- \mathbf{a} : 断面積, $\mathbf{K}(\mathbf{a})$: 剛性行列, \mathbf{u} : 変位, \mathbf{f} : 外力

- コンプライアンス最小化 (\mathbf{f} は固定)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{a}} \quad & c(\mathbf{a}; \mathbf{f}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a} \geq \mathbf{0}, \quad v(\mathbf{a}) \leq \bar{V} \end{aligned}$$

- コンプライアンスの最大値 (最悪値)

$$\bar{c}_{\max}(\mathbf{a}) = \sup_{\mathbf{f} \in \mathbf{R}^n} \{c(\mathbf{a}; \mathbf{f}) \mid \mathbf{f} \in \bar{\mathcal{F}}\}$$

コンプライアンス最適化

- コンプライアンス

$$c(\mathbf{a}; \mathbf{f}) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} \{2\mathbf{f}^T \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{K}(\mathbf{a}) \mathbf{u}\}$$

- \mathbf{a} : 断面積, $\mathbf{K}(\mathbf{a})$: 剛性行列, \mathbf{u} : 変位, \mathbf{f} : 外力

- コンプライアンス最小化 (\mathbf{f} は固定)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{a}} \quad & c(\mathbf{a}; \mathbf{f}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a} \geq \mathbf{0}, \quad v(\mathbf{a}) \leq \bar{V} \end{aligned}$$

- コンプライアンスの最大値 (最悪値)

$$\bar{c}_{\max}(\mathbf{a}) = \sup_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}} \{c(\mathbf{a}; \mathbf{f}) \mid \mathbf{f} \in \mathcal{F}\}$$

- ロバスト・コンプライアンス最小化— $\bar{c}_{\max}(\mathbf{a})$ を最小化する

外力の不確定性モデル

- 公称値 $\tilde{f} \in \mathbf{R}^n$
- 不確定性集合 [Ben-Tal & Nemirovski 97]

$$\bar{\mathcal{F}} = \{Qe \mid 1 \geq \|e\|\}$$

外力の不確定性モデル

- 公称値 $\tilde{f} \in \mathbf{R}^n$
- 不確定性集合 [Ben-Tal & Nemirovski 97]

$$\bar{\mathcal{F}} = \{Qe \mid 1 \geq \|e\|\}$$

- $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$: ばらつきを表す行列

$$Q = [\tilde{f} \quad rv_1 \quad rv_2 \quad \cdots \quad rv_{n-1}]$$

- $r \geq 0$: ばらつきの大きさ
- v_1, \dots, v_{n-1} : \tilde{f} の直交補空間の基底
- 全ての節点に不確定外力を想定

外力の不確定性モデル

- 公称値 $\tilde{f} \in \mathbf{R}^n$
- 不確定性集合 [Ben-Tal & Nemirovski 97]

$$\bar{\mathcal{F}} = \{Qe \mid 1 \geq \|e\|\}$$

- 設計に依存する不確定性モデル [提案]

$$\mathcal{F}(p) = \{\text{diag}(p)Qe \mid 1 \geq \|e\|\}$$

外力の不確定性モデル

- 公称値 $\tilde{f} \in \mathbf{R}^n$

- 不確定性集合 [Ben-Tal & Nemirovski 97]

$$\bar{\mathcal{F}} = \{Qe \mid 1 \geq \|e\|\}$$

- 設計に依存する不確定性モデル [提案]

$$\mathcal{F}(p) = \{\text{diag}(p)Qe \mid 1 \geq \|e\|\}$$

- $p \in \mathbf{R}^n$: 節点 (の自由度) の存在を表すベクトル

$$p_j = \begin{cases} 1 & \text{if 自由度 } j \text{ が存在} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

最適化の過程で節点が消えれば, 対応する j について $p_j = 0$ とする

断面積の下限值

- 断面積の下限值に関する制約条件

$$a_i = 0 \quad \text{or} \quad a_{\min} \leq a_i \leq a_{\max} \quad (\spadesuit)$$

- 部材の存在を表す変数 t_i を導入

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{if 部材 } i \text{ が存在} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

断面積の下限値

- 断面積の下限値に関する制約条件

$$a_i = 0 \quad \text{or} \quad a_{\min} \leq a_i \leq a_{\max} \quad (\spadesuit)$$

- 部材の存在を表す変数 t_i を導入

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{if 部材 } i \text{ が存在} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $(\spadesuit) \Leftrightarrow$

$$a_i \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \leq t_i \begin{bmatrix} a_{\max} \\ -a_{\min} \end{bmatrix}$$

断面積の下限値

- 断面積の下限値に関する制約条件

$$a_i = 0 \quad \text{or} \quad a_{\min} \leq a_i \leq a_{\max} \quad (\spadesuit)$$

- 部材の存在を表す変数 t_i を導入

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{if 部材 } i \text{ が存在} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $(\spadesuit) \Leftrightarrow$

$$a_i \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \leq t_i \begin{bmatrix} a_{\max} \\ -a_{\min} \end{bmatrix}$$

- 部材の存在 t_i と 節点の自由度の存在 p_j の関係

$$0 \leq p_j \leq 1$$

$$t_i \leq p_j, \quad \forall i \in \{i \mid \text{部材 } i \text{ が自由度 } j \text{ に接続}\}$$

コンプライアンスの最悪値

- コンプライアンスの最悪値 (定義)

$$c_{\max}(\mathbf{a}) = \sup_{\mathbf{f} \in \mathbf{R}^n} \{c(\mathbf{a}; \mathbf{f}) \mid \mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbf{p}(\mathbf{a}))\}$$

- ただし, $\mathcal{F}(\mathbf{p}) = \{\text{diag}(\mathbf{p})\mathbf{Q}\mathbf{e} \mid 1 \geq \|\mathbf{e}\|\}$
- \mathbf{p} は \mathbf{a} の関数

コンプライアンスの最悪値

- コンプライアンスの最悪値 (定義)

$$c_{\max}(\mathbf{a}) = \sup_{\mathbf{f} \in \mathbf{R}^n} \{c(\mathbf{a}; \mathbf{f}) \mid \mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbf{p}(\mathbf{a}))\}$$

- ただし, $\mathcal{F}(\mathbf{p}) = \{\text{diag}(\mathbf{p})\mathbf{Q}\mathbf{e} \mid 1 \geq \|\mathbf{e}\|\}$
- \mathbf{p} は \mathbf{a} の関数

- Schur の補元に関する補題より

$$\tau \geq c_{\max}(\mathbf{a}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \tau \mathbf{I} & (\text{diag}(\mathbf{p})\mathbf{Q})^T \\ \text{diag}(\mathbf{p})\mathbf{Q} & \mathbf{K}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \succeq \mathbf{O}$$

(半正定値)

- 最悪コンプライアンスの最小化

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{a}} & \tau \\ \text{s.t.} & \mathbf{a} \geq \mathbf{0}, \quad v(\mathbf{a}) \leq \bar{V} \end{array}$$

ロバスト位相最適化問題

- 最悪コンプライアンスの最小化

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{a}} \quad & \tau \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a} \geq \mathbf{0}, \quad v(\mathbf{a}) \leq \bar{V} \end{aligned}$$

- 等価な問題 — 0-1 変数を含む半正定値計画問題

$$\begin{aligned} \min_{\tau, \mathbf{a}, \mathbf{t}, \mathbf{p}} \quad & c_{\max}(\mathbf{a}) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} \tau \mathbf{I} & (\text{diag}(\mathbf{p})\mathbf{Q})^T \\ \text{diag}(\mathbf{p})\mathbf{Q} & \mathbf{K}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \succeq \mathbf{O} \\ & 0 \leq p_j \leq 1 \\ & t_i \leq p_j, \quad \forall i \in \{i \mid \text{部材 } i \text{ が自由度 } j \text{ に接続}\} \\ & a_i \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \leq t_i \begin{bmatrix} a_{\max} \\ -a_{\min} \end{bmatrix} \\ & \mathbf{a} \geq \mathbf{0}, \quad v(\mathbf{a}) \leq \bar{V} \\ & t_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

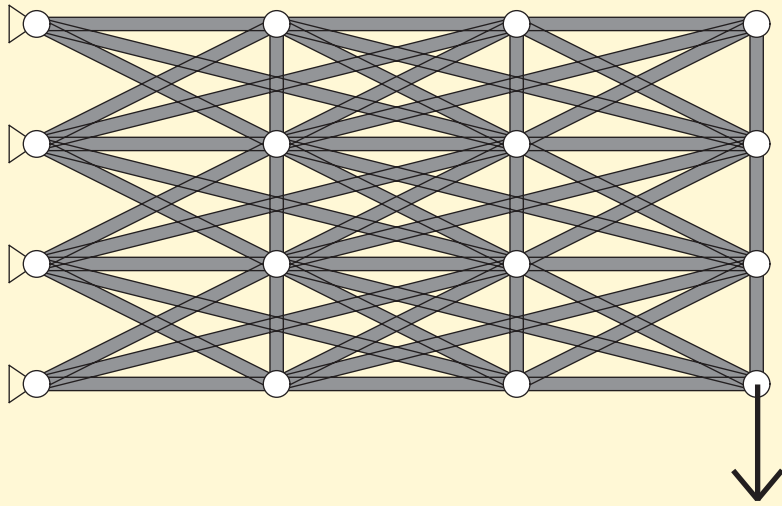
ロバスト位相最適化問題

- 最悪コンプライアンスの最小化

$$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{a}} & \tau \\ \text{s.t.} & \mathbf{a} \geq \mathbf{0}, \quad v(\mathbf{a}) \leq \bar{V} \end{array}$$

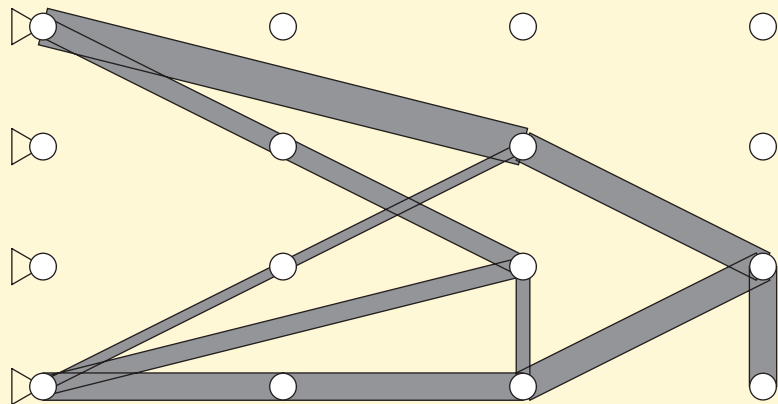
- 等価な問題 — 0-1 変数を含む半正定値計画問題
 - 0-1 制約を緩和すると半正定値計画問題
→ 主双対内点法で容易に解ける
 - 0-1 変数に関する分枝限定法
→ 大域的最適解が得られる

ex.) 51 部材トラス

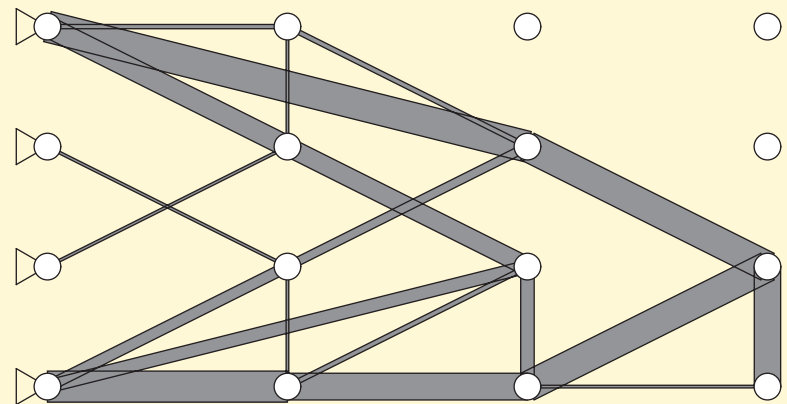


初期トラス

ex.) 51 部材トラス

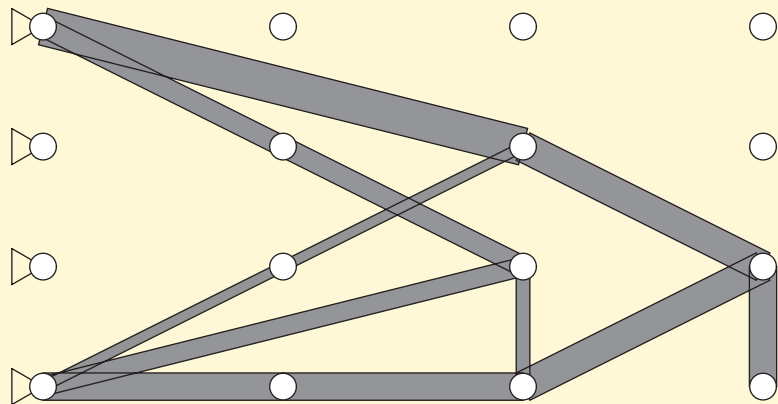


通常最適解 (♣)

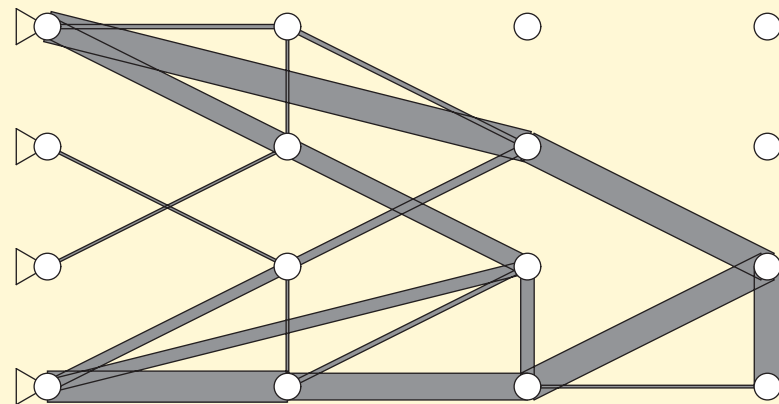


ロバスト最適解 (大域的最適解)

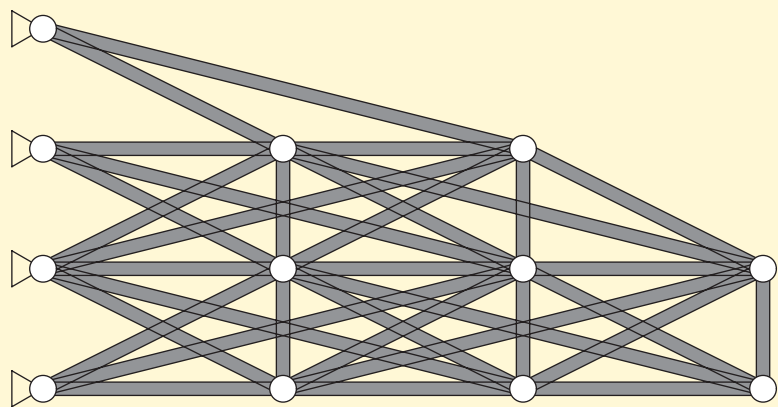
ex.) 51 部材トラス



通常最適解 (♣)

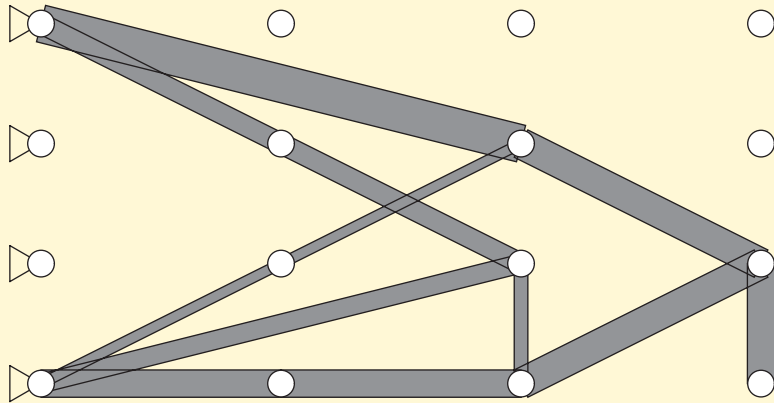


ロバスト最適解 (大域的最適解)

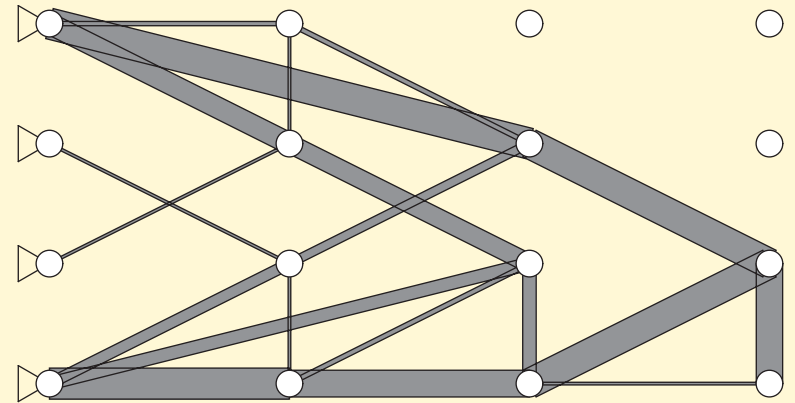


(♣) から推測される初期解 (Ini♣)

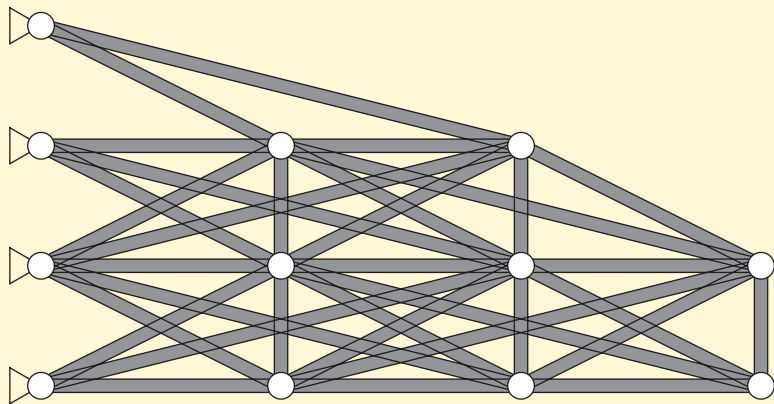
ex.) 51 部材トラス



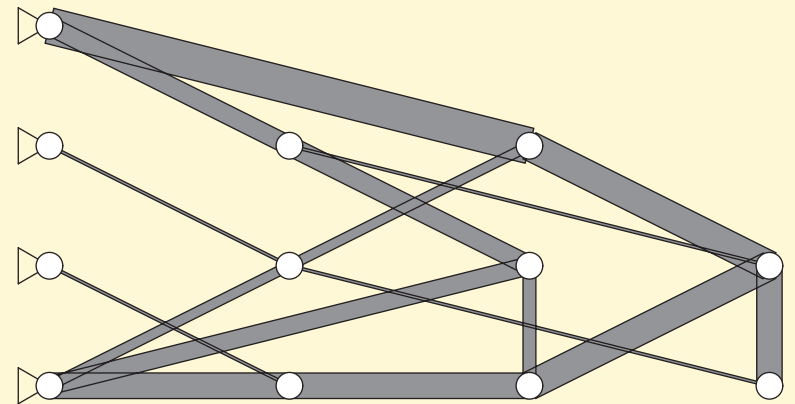
通常最適解 (♣)



ロバスト最適解 (大域的最適解)

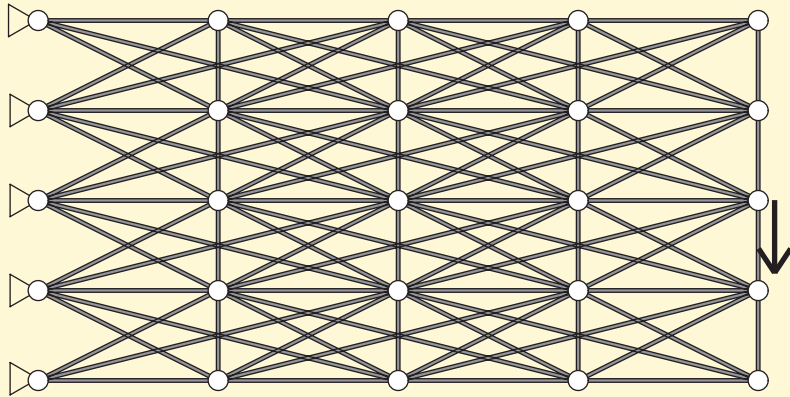


(♣) から推測される初期解 (Ini♣)



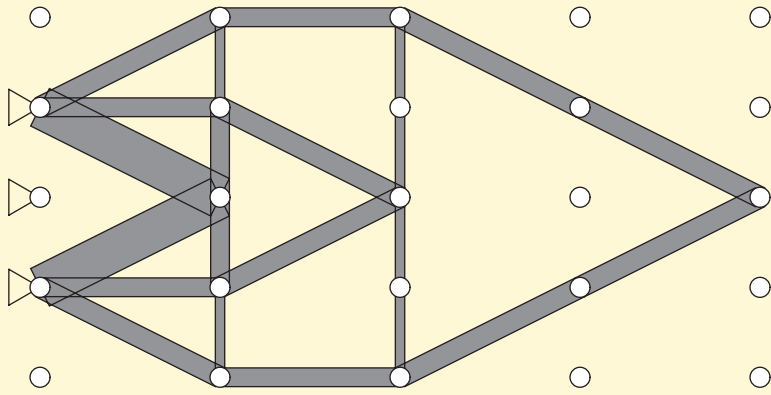
(Ini♣) から得られる
ロバスト最適解
≠ 大域的最適解

ex.) 92 部材トラス

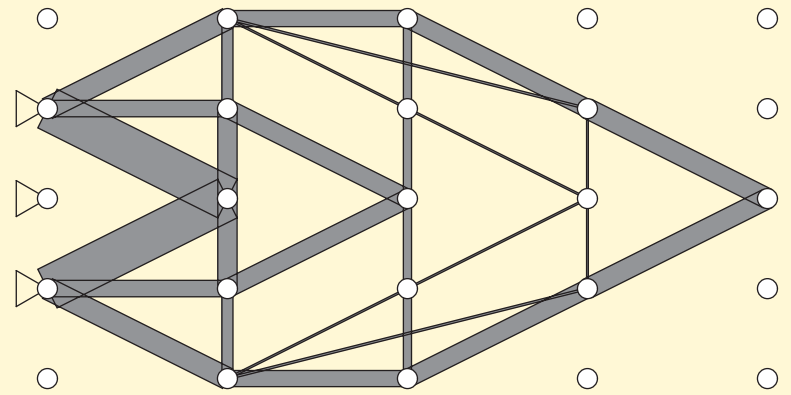


初期トラス

ex.) 92 部材トラス

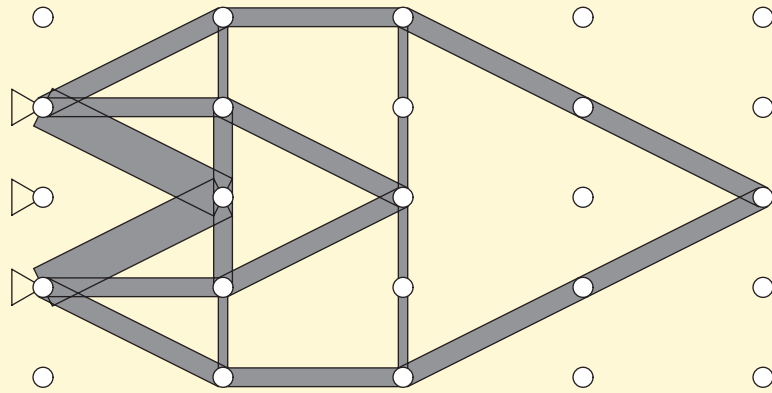


通常最適解

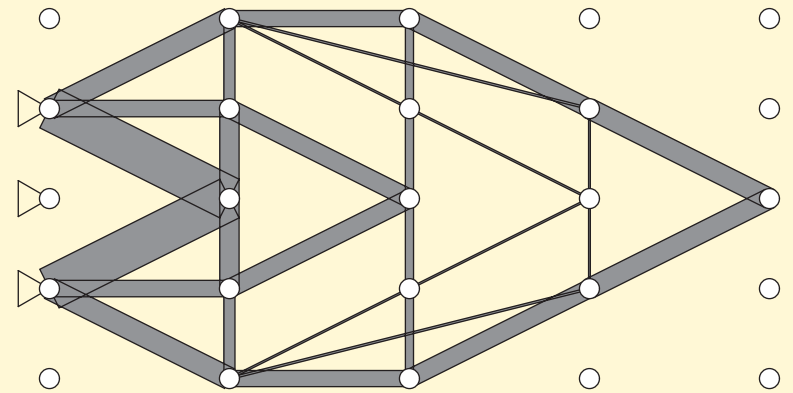


ロバスト最適解

ex.) 92 部材トラス



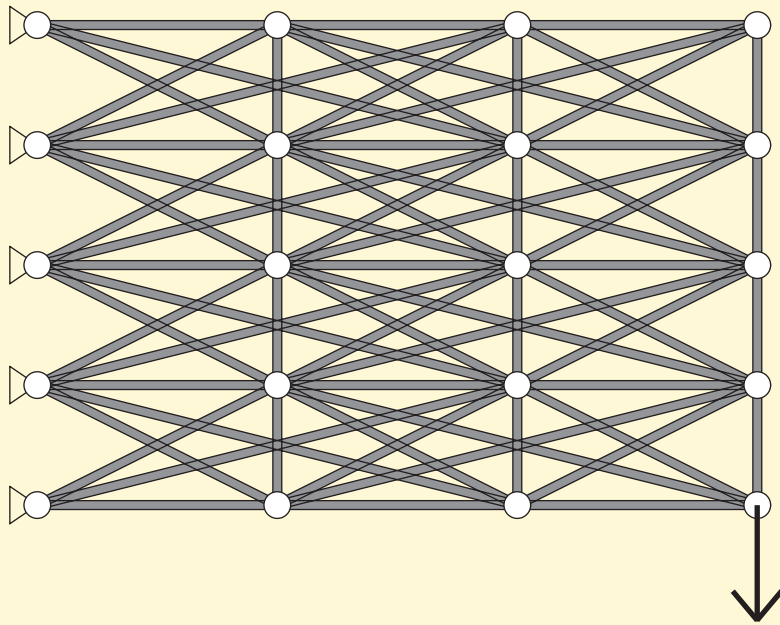
通常最適解



ロバスト最適解

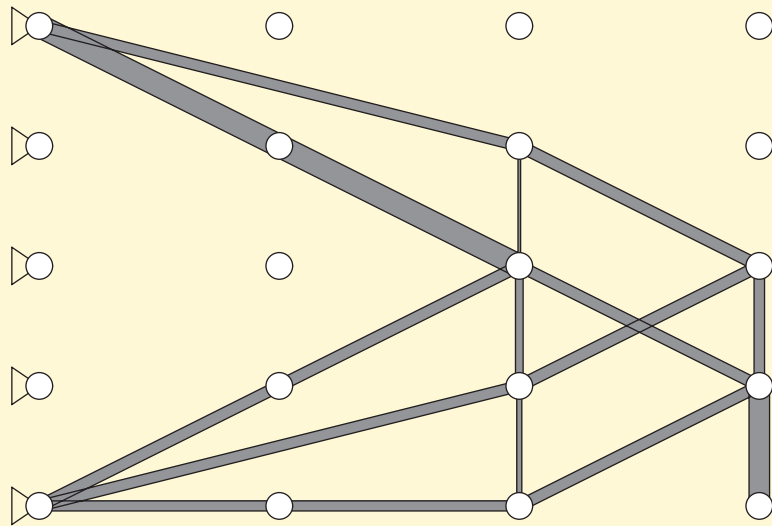
| | c_{\max} (kN · cm) | rank D | n | Nodes | CPU (s) |
|-------|----------------------|----------|-----|-------|---------|
| (TO) | 10.2038 | 22 | 26 | 1 | 11.4 |
| (RTO) | 10.5247 | 30 | 28 | 9444 | 57176.0 |

ex.) 67 部材トラス

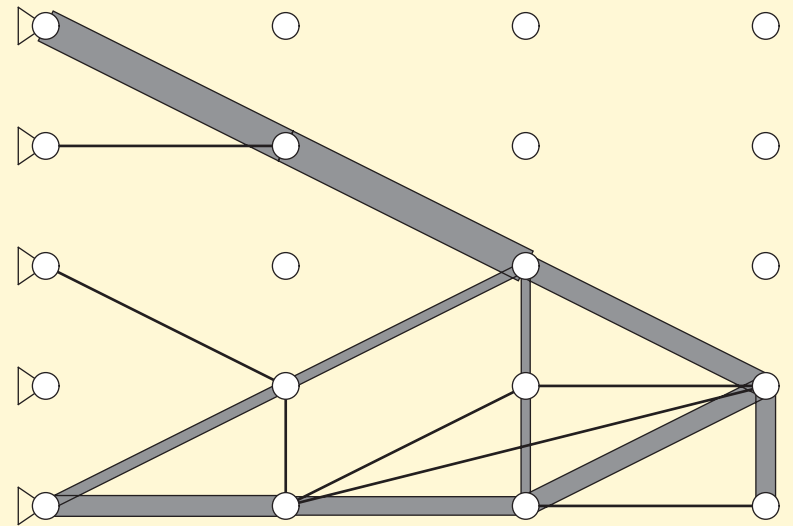


初期トラス

ex.) 67 部材トラス

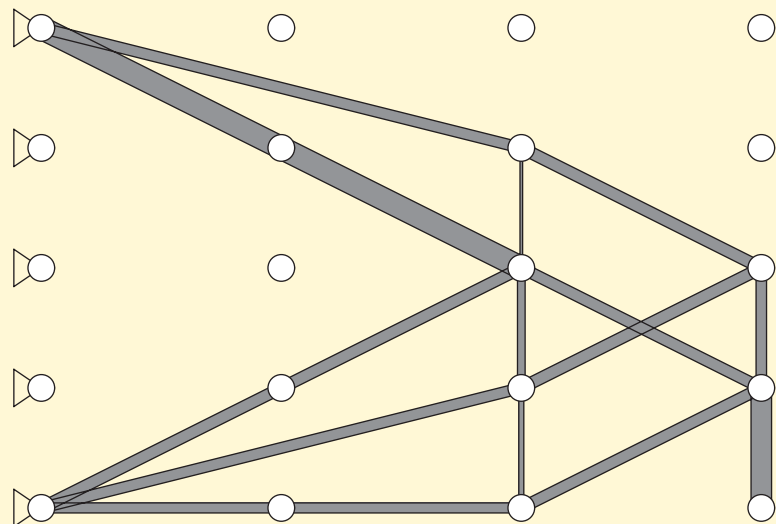


通常最適解

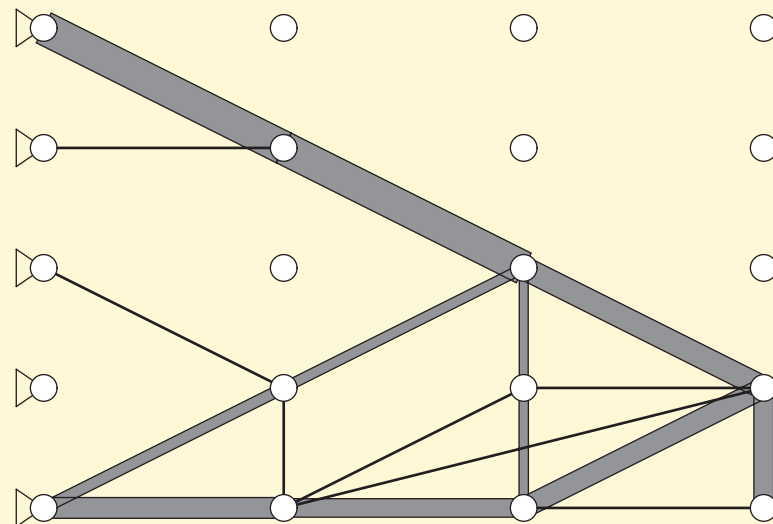


ロバスト最適解

ex.) 67 部材トラス



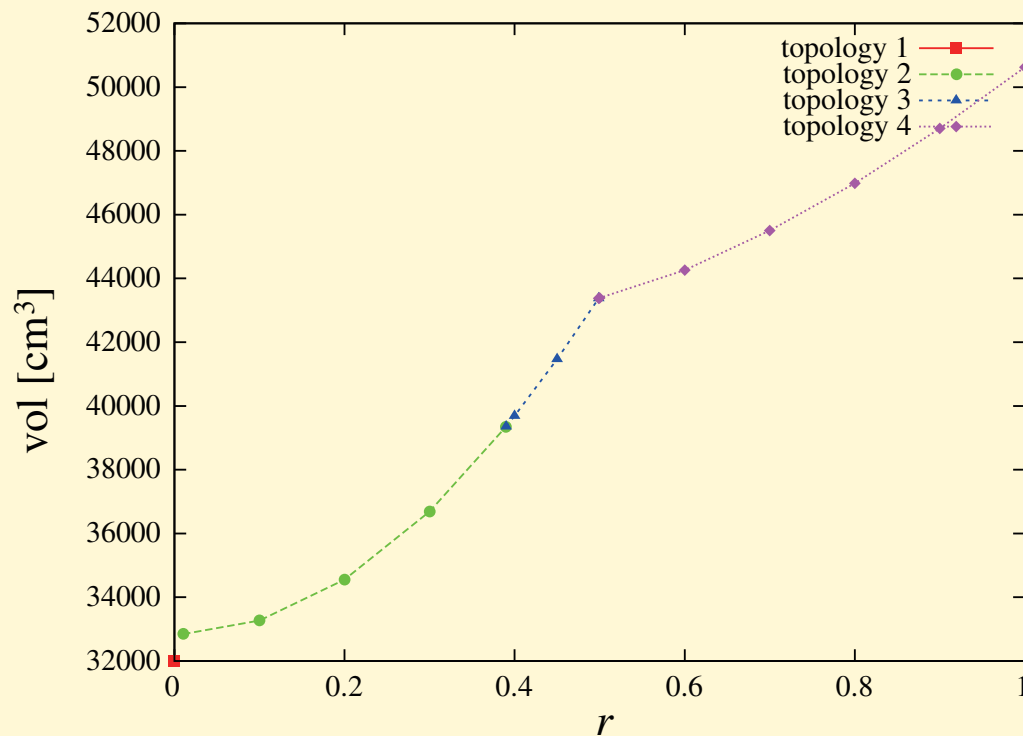
通常最適解



ロバスト最適解

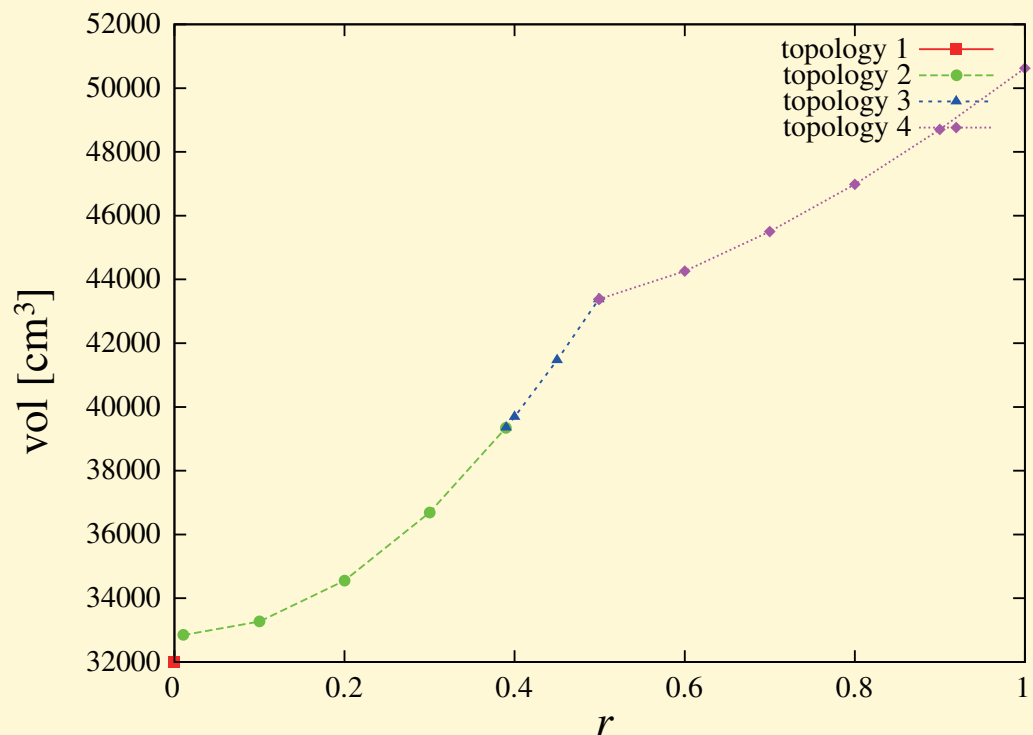
| | c_{\max} (kN · cm) | rank D | n | Nodes | CPU (s) |
|-------|----------------------|----------|-----|-------|---------|
| (TO) | 3.4105 | 16 | 20 | 1 | 3.8 |
| (RTO) | 3.5585 | 17 | 16 | 8396 | 14300.0 |

不確定性の大きさと最適位相の関係 (22 部材トラス)

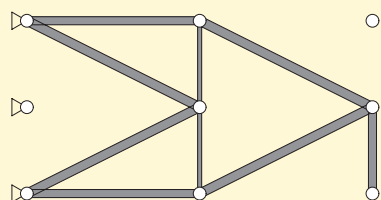


- 不確定性の大きさ r
VS.
最適解の体積 vol
- コンプライアンスの
上限を指定,
体積を最小化

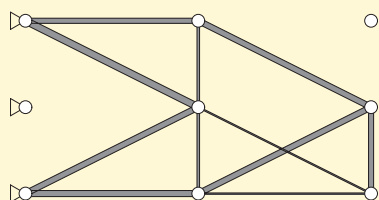
不確定性の大きさと最適位相の関係 (22 部材トラス)



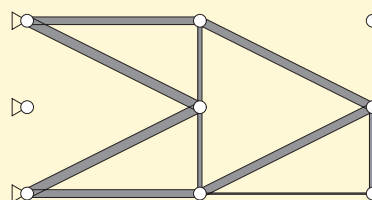
- 不確定性の大きさ r
VS.
最適解の体積 vol
- コンプライアンスの
上限を指定,
体積を最小化



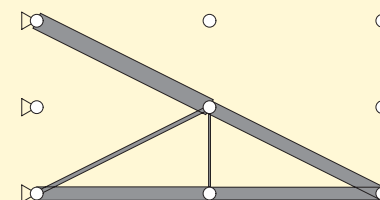
topology 1



topology 2



topology 3



topology 4

- トラスのロバスト最適化
 - 位相最適化問題
 - 外力の不確定性
 - コンプライアンス (の最悪値) の最小化
- 大域的最適化
 - 整数変数を含む半正定値計画問題
 - 分枝限定法 & 主双対内点法
- Reference:
K. Yonekura, Y. Kanno: “Global optimization of robust truss topology via mixed integer semidefinite programming.” *Optimization and Engineering*, DOI: 10.1007/s11081-010-9107-1.