

混合整数計画を用いた 不確定外力を受けるトラスの極限解析法

寒野 善博[†] 竹脇 出[‡]

[†] 東京大学大学院 (数理情報学専攻)

[‡] 京都大学大学院 (都市環境工学専攻)

目的

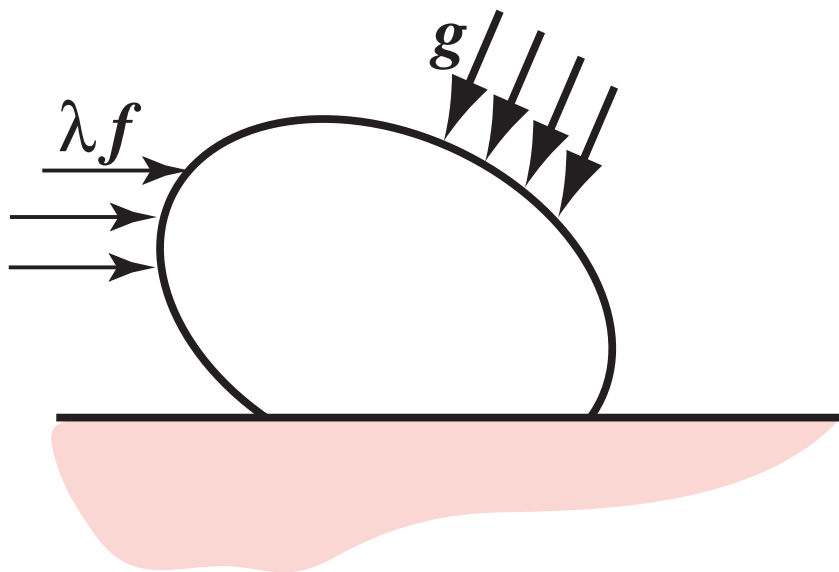
- 不確定性解析
 - 凸モデル, インフォ・ギャップ理論, etc.
- 極限解析 (崩壊荷重係数)
 - 確率論的な極限解析 [Marti & Stoeckel 04]
[Lloyd Smith, Chuang & Munro 90], [Staat & Heitzer 03]
- worst-case detection
 - 反最適化 [Elishakoff, Haftka & Fang 94]
 - 2 段階計画法 [Cheng *et al.* 02], [Craig *et al.* 03]

目的

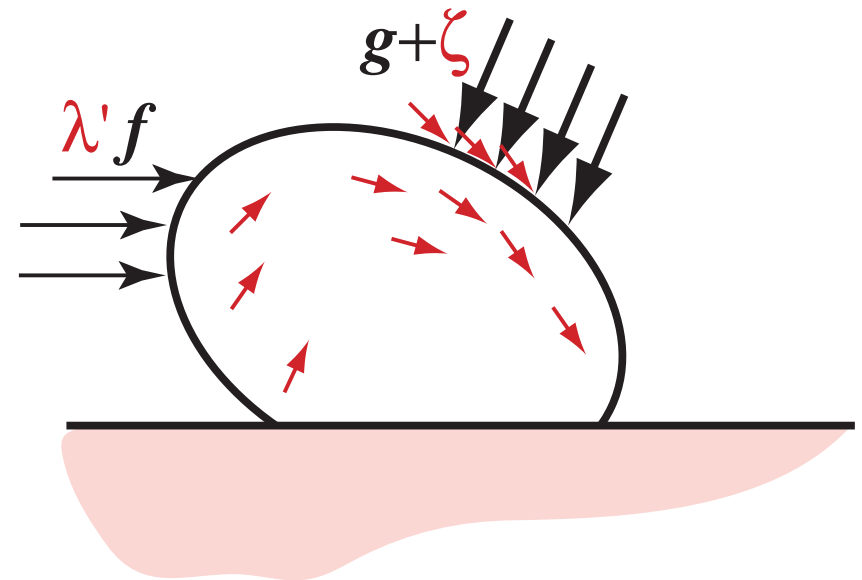
- 不確定性解析
 - 凸モデル, インフォ・ギャップ理論, etc.
- 極限解析 (崩壊荷重係数)
 - 確率論的な極限解析 [Marti & Stoeckel 04]
[Lloyd Smith, Chuang & Munro 90], [Staat & Heitzer 03]
 - 非確率論的 (#)
- worst-case detection
 - 反最適化 [Elishakoff, Haftka & Fang 94]
 - 2 段階計画法 [Cheng *et al.* 02], [Craig *et al.* 03]
 - 線形近似しない & 大域解 (#)
- 大域的最適化が自然に要求される問題 (#)

荷重が不確定な極限解析

- 小さな ζ が存在
 - 崩壊荷重係数が大きく低下
 - 崩壊モードが変化
- $\rightarrow \zeta$ の取り得る範囲が与えられたとき
 - 崩壊荷重係数の最小値と，そのときの ζ を求める



公称値の状況



不確定な状況

混合0-1計画問題

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

変数 : x_1, \dots, x_n

定数 : $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ $p < n$

- 0-1 制約以外は線形
- $0 \leq x_i \leq 1$ とするとLP緩和

混合0-1計画問題

- mixed 0-1 program
- 整数計画法の1つ
- 分枝限定法 [Lang & Doig 60], [Held & Karp 70,71], etc.
- 切除平面法
 - Gomory's cut [Gomory 58]
 - lift-and-projection cut
[Lov'asz & Schrijver 91], [Sherali & Adams 90]
 - 離接 (disjunctive) カット [Balas 74, 98]

混合0-1計画問題

- mixed 0-1 program
- 整数計画法の1つ
- 分枝限定法 [Lang & Doig 60], [Held & Karp 70,71], etc.
- 切除平面法
 - Gomory's cut [Gomory 58]
 - lift-and-projection cut
[Lov'asz & Schrijver 91], [Sherali & Adams 90]
 - 離接 (disjunctive) カット [Balas 74, 98] (#)
- 分枝カット法 (#)
- ソフトウェア
 - CPLEX, Xpress-MP, bc-opt, etc.

不確定性

- 確率論的
 - 信頼性設計
- 非確率論的
 - unknown-but-bounded

不確定性

- 確率論的
 - 信頼性設計
- 非確率論的
 - unknown-but-bounded
 - convex model [Ben-Haim & Elishakoff 90]
 - interval analysis [Alefeld & Mayer 00], [Chen *et al.* 02], etc.
 - ロバスト LP, QP, SDP [Ben-Tal & Nemirovski 02]
 - インフォ・ギャップ不確定性モデル [Ben-Haim 01, 06]

極限解析 (確定的な外力)

$$\lambda^*(\mathbf{f}_D) = \max_{\lambda, \mathbf{q}} \{ \lambda : (\lambda, \mathbf{q}) \in \mathcal{Q}(\mathbf{f}_D) \} \quad (\text{LP})$$

- 下界定理 (トラス)

極限解析 (確定的な外力)

$$\lambda^*(\mathbf{f}_D) = \max_{\lambda, \mathbf{q}} \{ \lambda : (\lambda, \mathbf{q}) \in \mathcal{Q}(\mathbf{f}_D) \} \quad (\text{LP})$$

• $(\lambda, \mathbf{q}) \in \mathcal{Q}(\mathbf{f}_D) \iff$

$$B\mathbf{q} = \mathbf{f}_D + \lambda\mathbf{f}_R \quad (\text{釣合式})$$

$$|q_i| - q_i^y \leq 0 \quad (\text{降伏条件})$$

\mathbf{q} 軸力

$\mathbf{f}_R, \mathbf{q}^y$ 確定的 (とみなす)

$\lambda^*(\mathbf{f}_D)$ 崩壊荷重係数

極限解析 (確定的な外力)

$$\lambda^*(\mathbf{f}_D) = \max_{\lambda, \mathbf{q}} \{ \lambda : (\lambda, \mathbf{q}) \in \mathcal{Q}(\mathbf{f}_D) \} \quad (\text{LP})$$

• $(\lambda, \mathbf{q}) \in \mathcal{Q}(\mathbf{f}_D) \iff$

$$\mathbf{B}\mathbf{q} = \mathbf{f}_D + \lambda\mathbf{f}_R \quad (\text{釣合式})$$

$$|q_i| - q_i^y \leq 0 \quad (\text{降伏条件})$$

\mathbf{q} 軸力

$\mathbf{f}_R, \mathbf{q}^y$ 確定的 (とみなす)

$\lambda^*(\mathbf{f}_D)$ 崩壊荷重係数 : \mathbf{f}_D の関数

\mathbf{f}_D の不確定性を考える

不確定性モデル

$$f_D = \tilde{f}_D + T\zeta \quad (\text{LP})$$

\tilde{f}_D : 公称値

T : 定行列

● 不確定パラメータ ζ $\zeta \in \mathcal{Z}(\alpha)$

不確定性モデル

$$f_D = \tilde{f}_D + T\zeta \quad (\text{LP})$$

\tilde{f}_D : 公称値

T : 定行列

- 不確定パラメータ ζ

$$\alpha \geq |\zeta_j|, \quad j = 1, \dots, m$$

- α : 不確定性の‘大きさ’
- $f_D \in \mathcal{F}_D(\alpha)$ と書く
- 以下では, α は定数とみなす

最悪崩壊荷重係数

$$(定義) \quad \lambda_{\min}(\alpha) = \min_{\mathbf{f}_D} \{ \lambda^*(\mathbf{f}_D) : \mathbf{f}_D \in \mathcal{F}_D(\alpha) \} \quad (\clubsuit)$$

最適解 \mathbf{f}_D^* : クリティカル外乱

$\lambda^*(\mathbf{f}_D)$: 最大化問題 (下界定理) の最適値

● 上界定理を用いると,

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\alpha) = \min_{\mathbf{u}, \mathbf{z}} \quad & -\alpha \|\mathbf{T}\mathbf{u}\|_1 - \tilde{\mathbf{f}}_D^T \mathbf{u} + (\mathbf{q}^y)^T \mathbf{z} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{f}_R^T \mathbf{u} = 1 \\ & z_i \geq |\mathbf{b}_i^T \mathbf{u}| \end{aligned}$$

最悪崩壊荷重係数

$$(定義) \quad \lambda_{\min}(\alpha) = \min_{f_D} \{ \lambda^*(f_D) : f_D \in \mathcal{F}_D(\alpha) \} \quad (\clubsuit)$$

最適解 f_D^* : クリティカル外乱

$\lambda^*(f_D)$: 最大化問題 (下界定理) の最適値

- (\clubsuit) は非凸
- (\clubsuit) の局所解には (工学的) 意味がない
 - 通常 **の非線形計画法は使えそうにない**
- 大域的最適化の手法が**必要**
 - 大域解である保証
 - 崩壊荷重係数の**下界**である保証

混合0-1計画問題

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\alpha) = & \min_{\mathbf{u}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}} && -\alpha \mathbf{1}^T \boldsymbol{\gamma} - \tilde{\mathbf{f}}_D^T \mathbf{u} + (\mathbf{q}^y)^T \mathbf{z} \\ & \text{s.t.} && \mathbf{f}_R^T \mathbf{u} = 1, \quad z_i \geq |\mathbf{b}_i^T \mathbf{u}| \\ & && \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{T}^T \mathbf{u} \leq M(\mathbf{1} - \boldsymbol{\tau}) \\ & && \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{T}^T \mathbf{u} \leq M\boldsymbol{\tau} \\ & && \boldsymbol{\tau} \in \{0, 1\}^m \end{aligned} \quad (\spadesuit)$$

- (\spadesuit) の最適値は最悪崩壊荷重
- (\spadesuit) の最適解から，クリティカル外乱 \mathbf{f}_D^* を構成できる

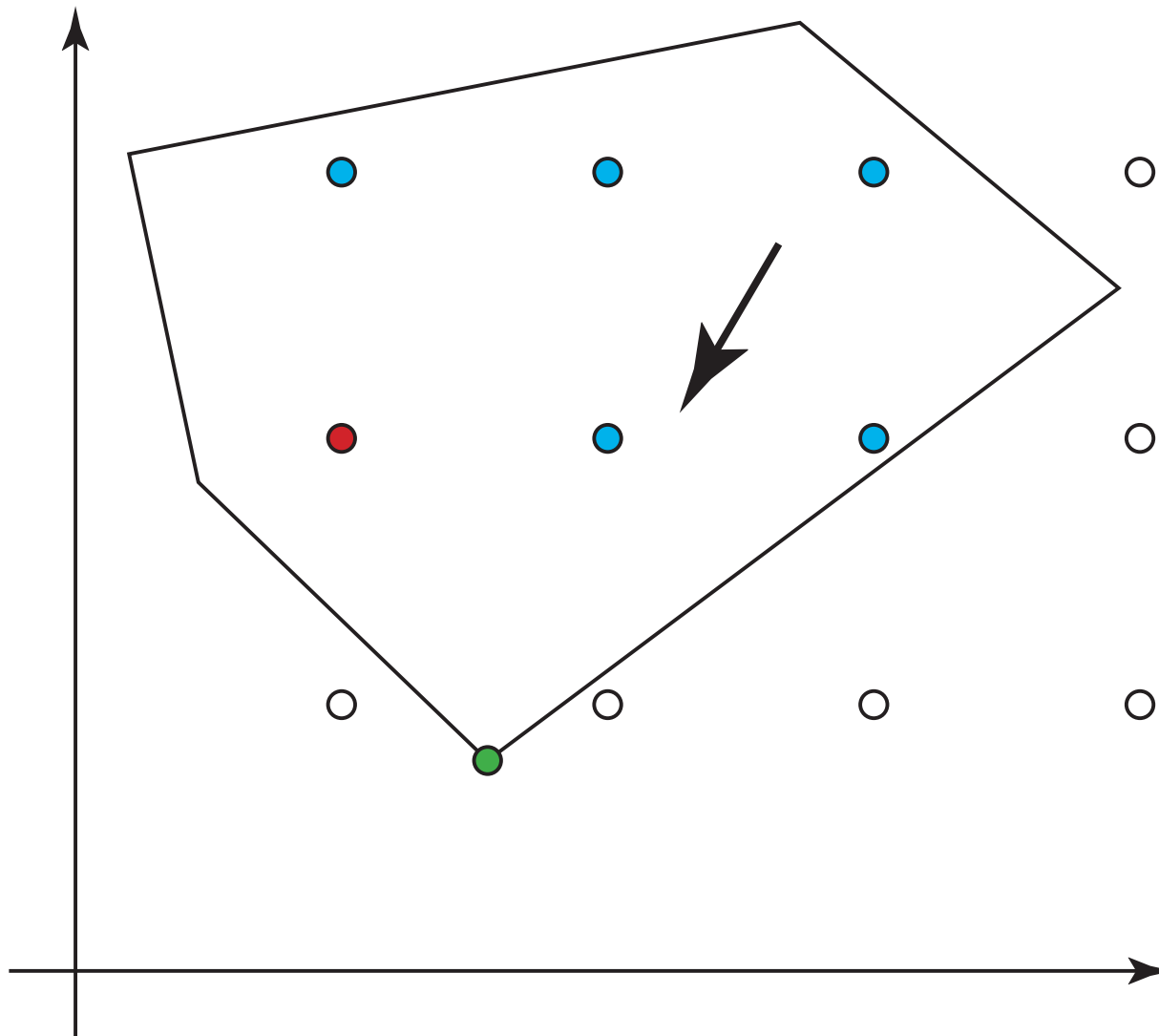
混合0-1計画問題

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\alpha) = & \min_{\mathbf{u}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\tau}} && -\alpha \mathbf{1}^T \boldsymbol{\gamma} - \tilde{\mathbf{f}}_D^T \mathbf{u} + (\mathbf{q}^y)^T \mathbf{z} \\ & \text{s.t.} && \mathbf{f}_R^T \mathbf{u} = 1, \quad z_i \geq |\mathbf{b}_i^T \mathbf{u}| \\ & && \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{T}^T \mathbf{u} \leq M(\mathbf{1} - \boldsymbol{\tau}) \\ & && \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{T}^T \mathbf{u} \leq M\boldsymbol{\tau} \\ & && \boldsymbol{\tau} \in \{0, 1\}^m \end{aligned} \quad (\spadesuit)$$

- 0-1 制約を $0 \leq \tau \leq 1$ に置き換える \longrightarrow LP 緩和
- 分枝限定法 $\tau_j := 0$ or $\tau_j := 1$
 - 緩和の精度が不十分 \longrightarrow 効率が悪い
 - カットの利用

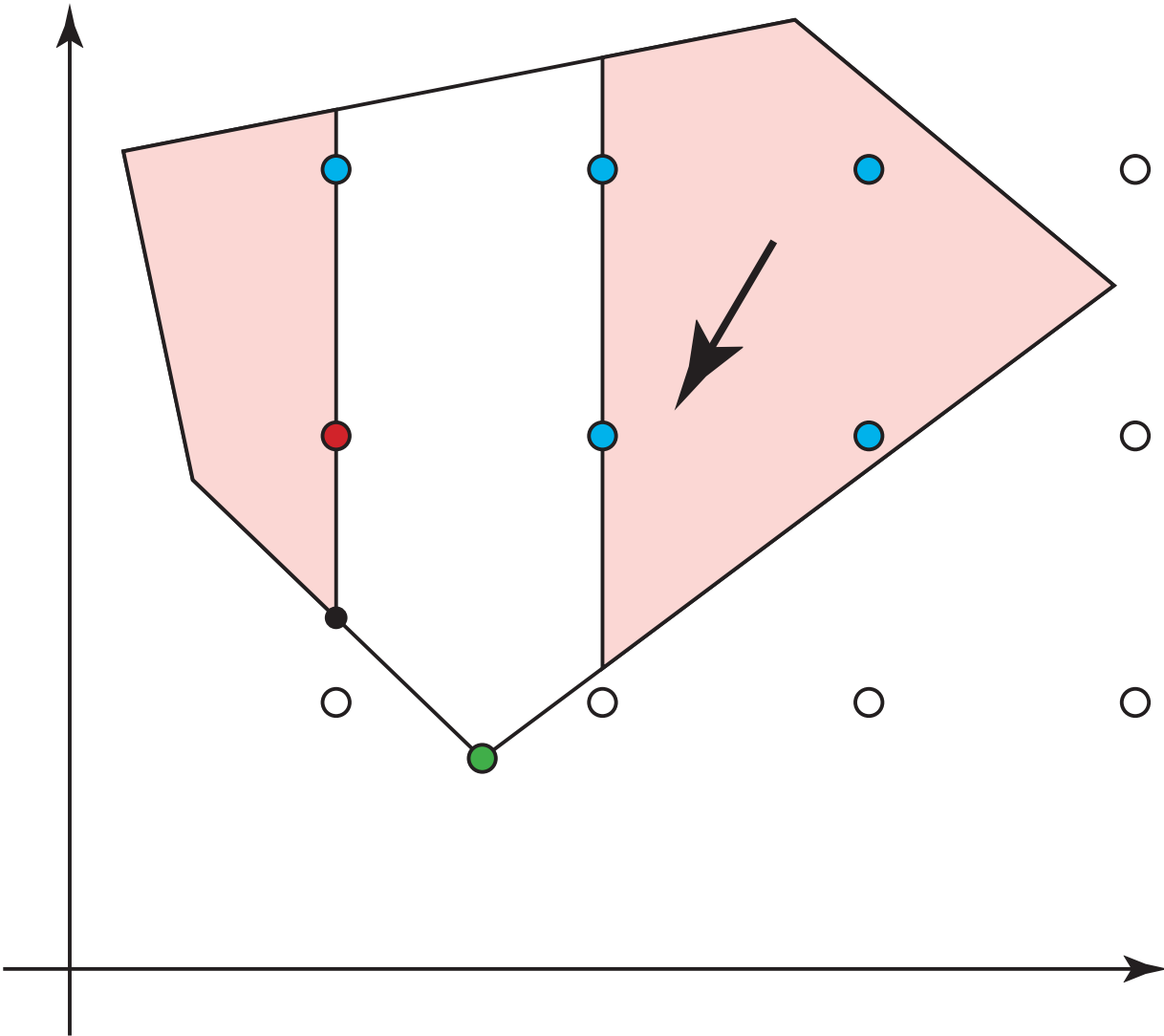
離接カット

LP 緩和



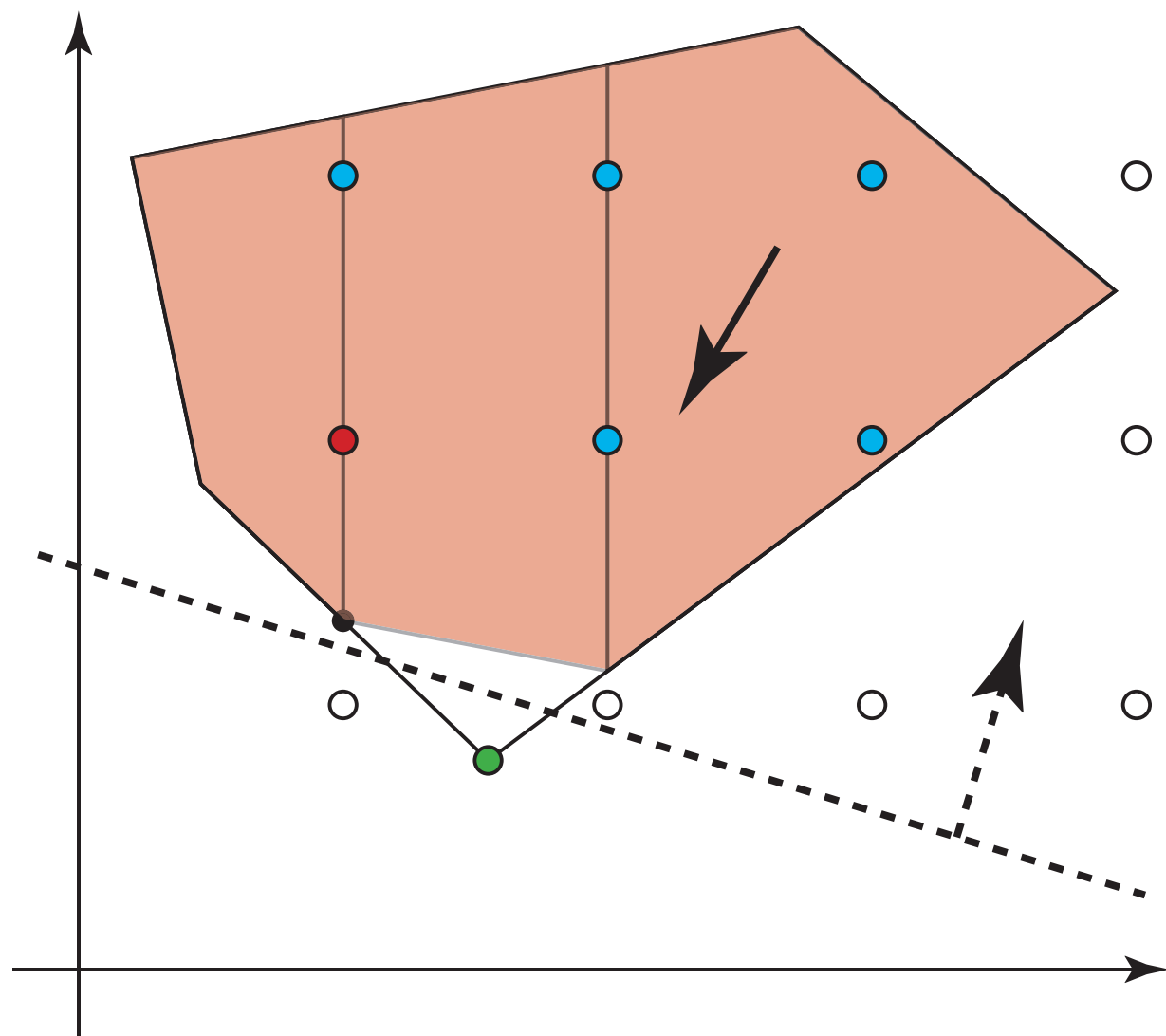
離接カット

離接集合



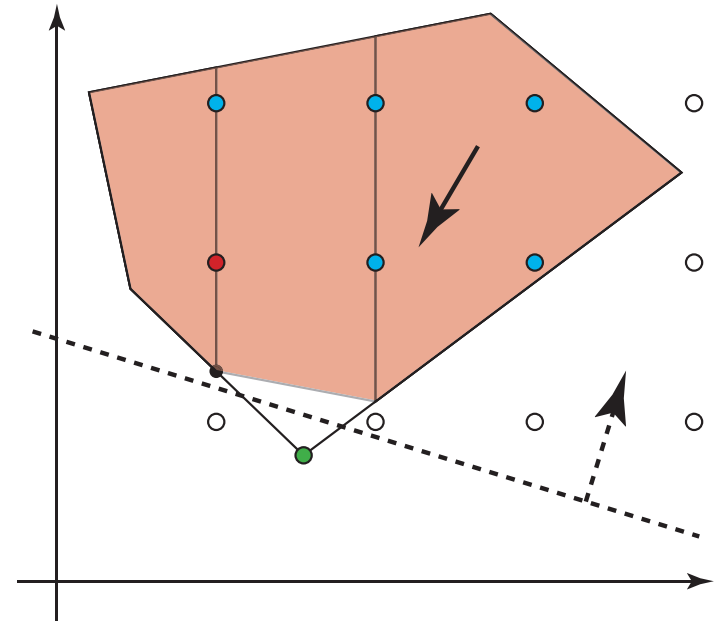
離接カット

離接計画緩和とカット



離接カット

- \mathcal{K} : LP 緩和 (の実行可能領域)
- カット (切除平面) :
線形不等式のうち
 - MIP のすべての実行可能解が満たし,
 - LP 緩和の解が満たさないもの
- 離接計画緩和 (の実行可能領域) :
 - $P_j(\mathcal{K}) = \text{cl conv} \{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{K} \mid \tau_j \in \{0, 1\} \}$
 - 線形不等式系で表現できる
- 離接カット
 - $P_j(\mathcal{K})$ に対するカット



離接カット

- 離接カット
 - $\alpha^T x \geq \beta$
 - LP 緩和の解 \hat{x} が満たさず
 - すべての $x \in P_j(\mathcal{K})$ が満たす
- なるべく‘深い’カットが望ましい
 - \hat{x} からなるべく‘遠い’カット

離接カット

- 離接カット
 - $\alpha^T x \geq \beta$
 - LP 緩和の解 \hat{x} が満たさず
 - すべての $x \in P_j(\mathcal{K})$ が満たす
- なるべく‘深い’カットが望ましい
 - \hat{x} からなるべく‘遠い’カット

$$\begin{aligned} \min \quad & \beta - \alpha^T \hat{x} \\ \text{s.t.} \quad & (\alpha, \beta) \in P_j^*(\mathcal{K}) \\ & \|\alpha_{\mathcal{I}}\|_{\infty} \leq 1 \end{aligned} \tag{LP}$$

- $P_j^*(\mathcal{K}) : P_j^*(\mathcal{K})$ の双対
- $\mathcal{I} = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid \hat{x}_i = 0\}$

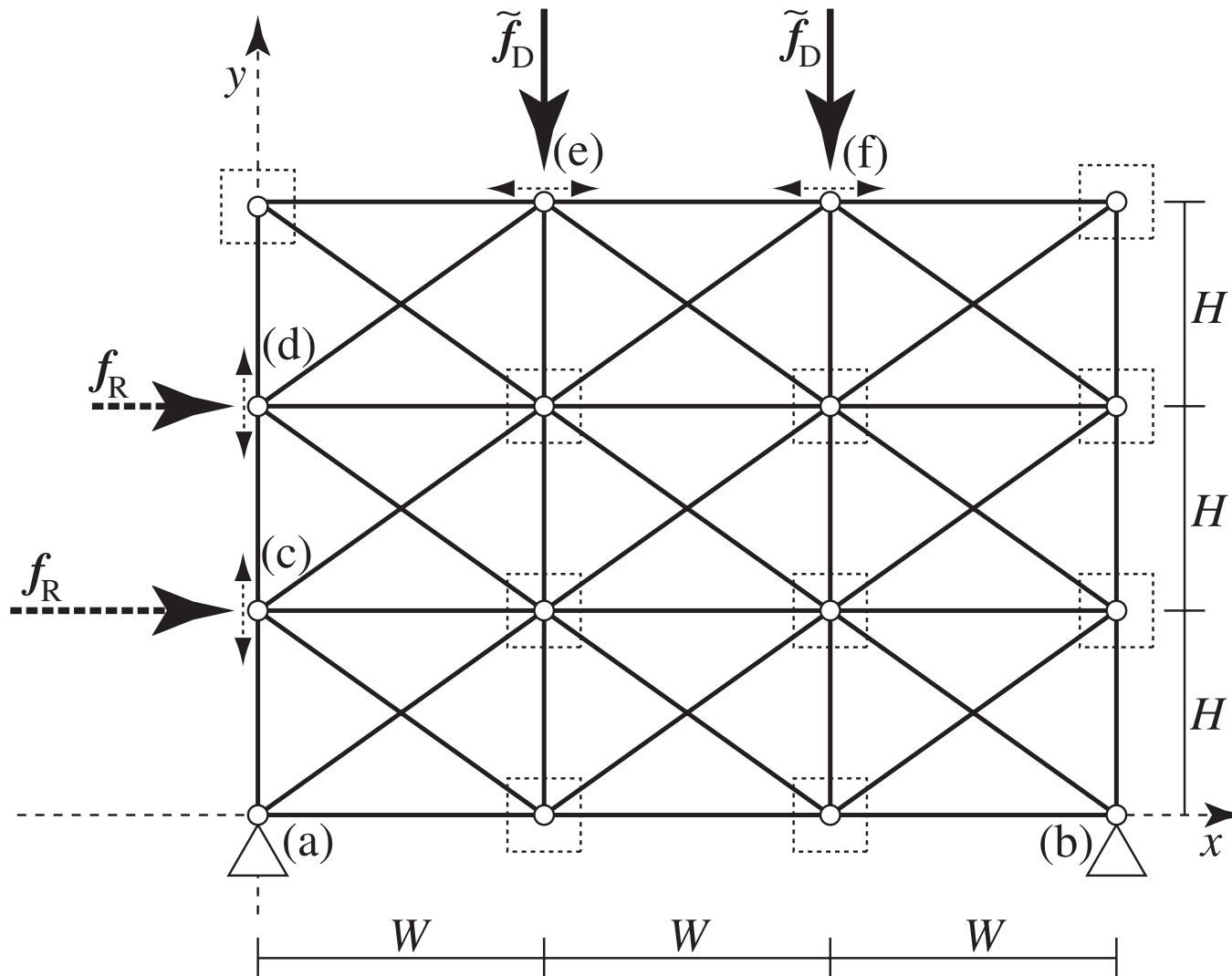
カット分枝法 (分枝カット法)

- いくつかのカットを生成
 - LP 緩和の解をもとに j を 1 つ選び
 - カット生成 LP を解く
 - 分枝限定法
 - カットを付け加えた LP 緩和を用いる
-

- より強い緩和が得られる
- 解くべき子問題の数が大きく減少

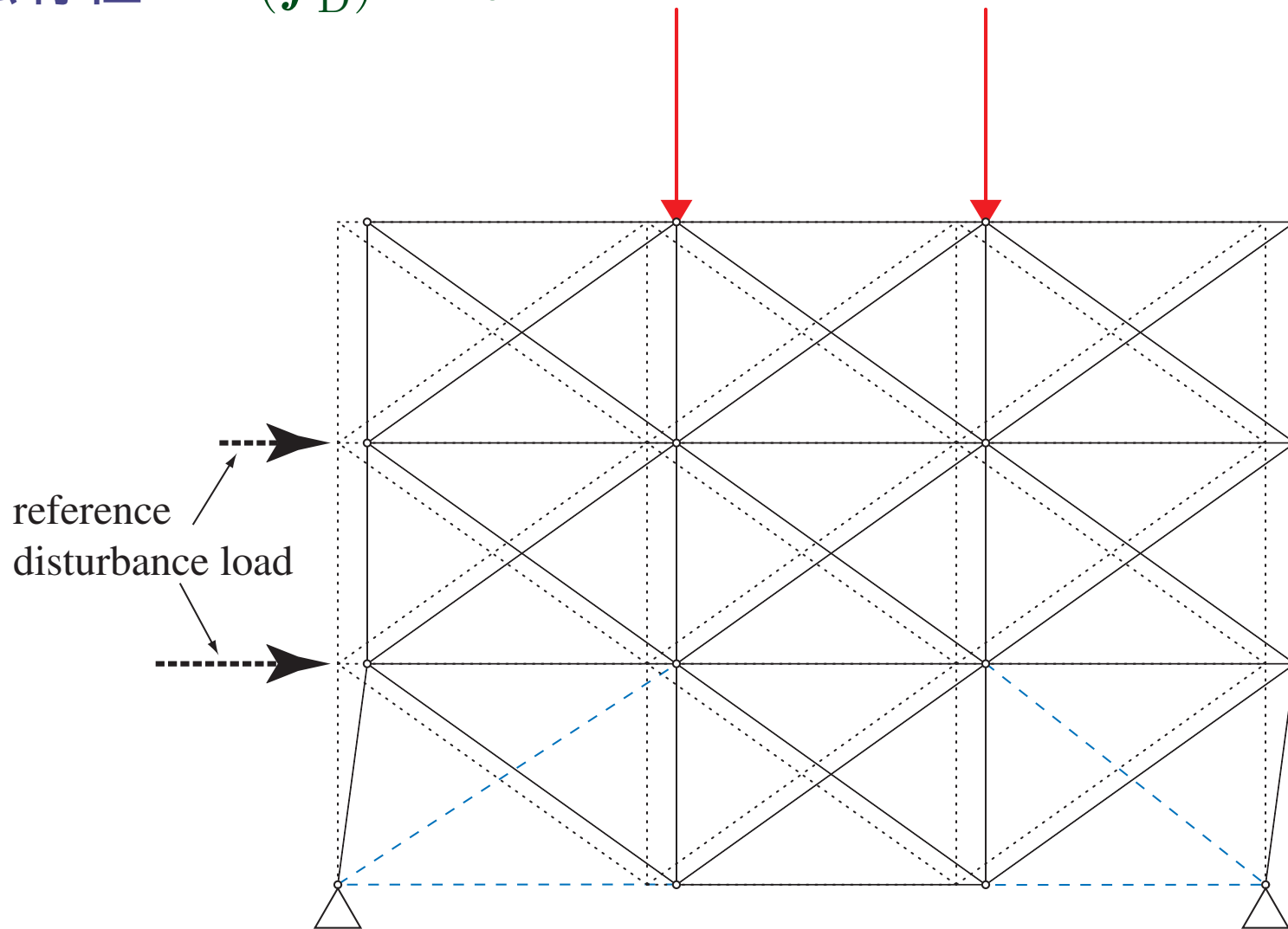
例題 (28 自由度, 42 部材)

- f_D が不確定



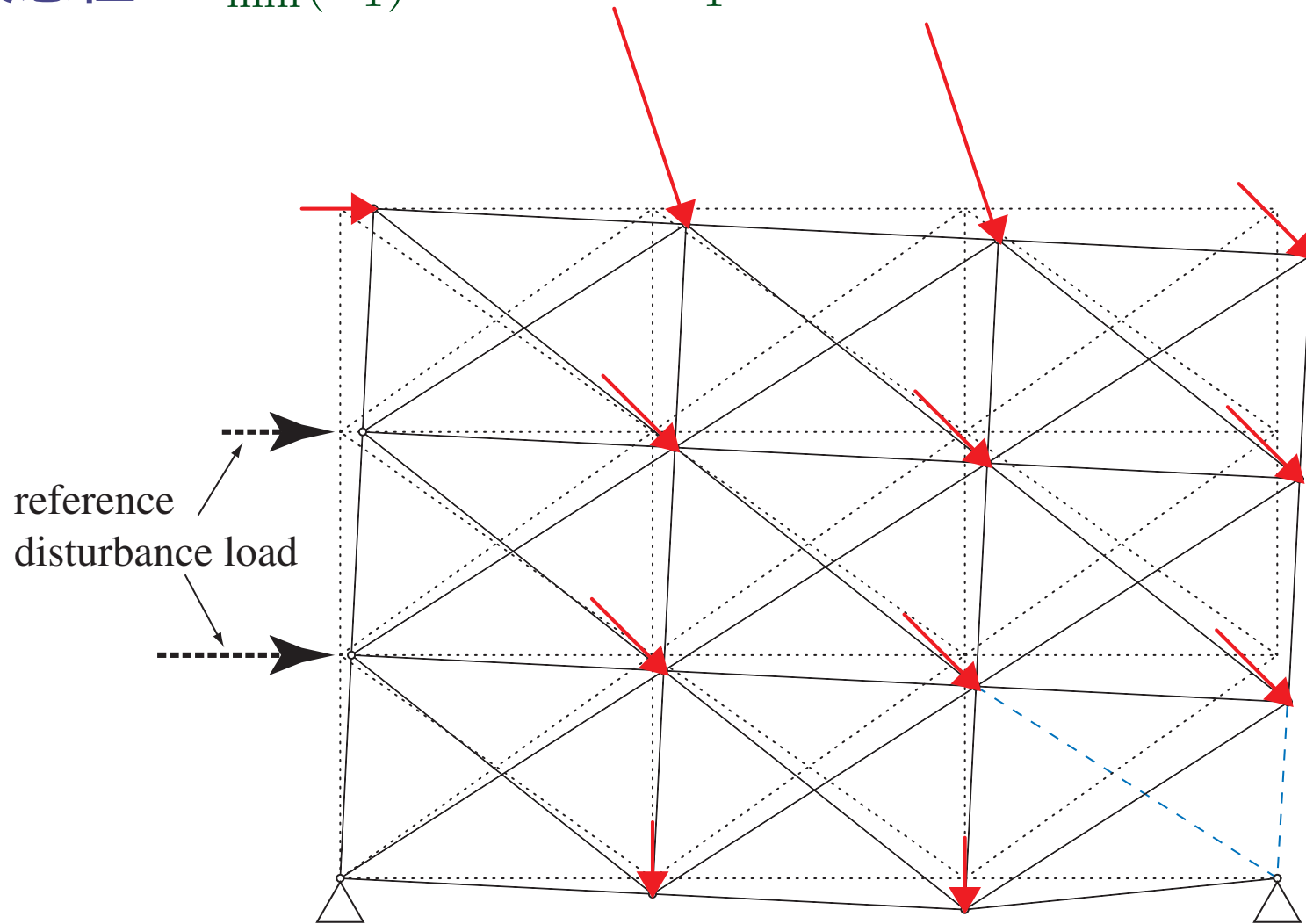
例題 (28 自由度, 42 部材)

- 公称値 : $\lambda^*(\tilde{\mathbf{f}}_D) = 48.4$



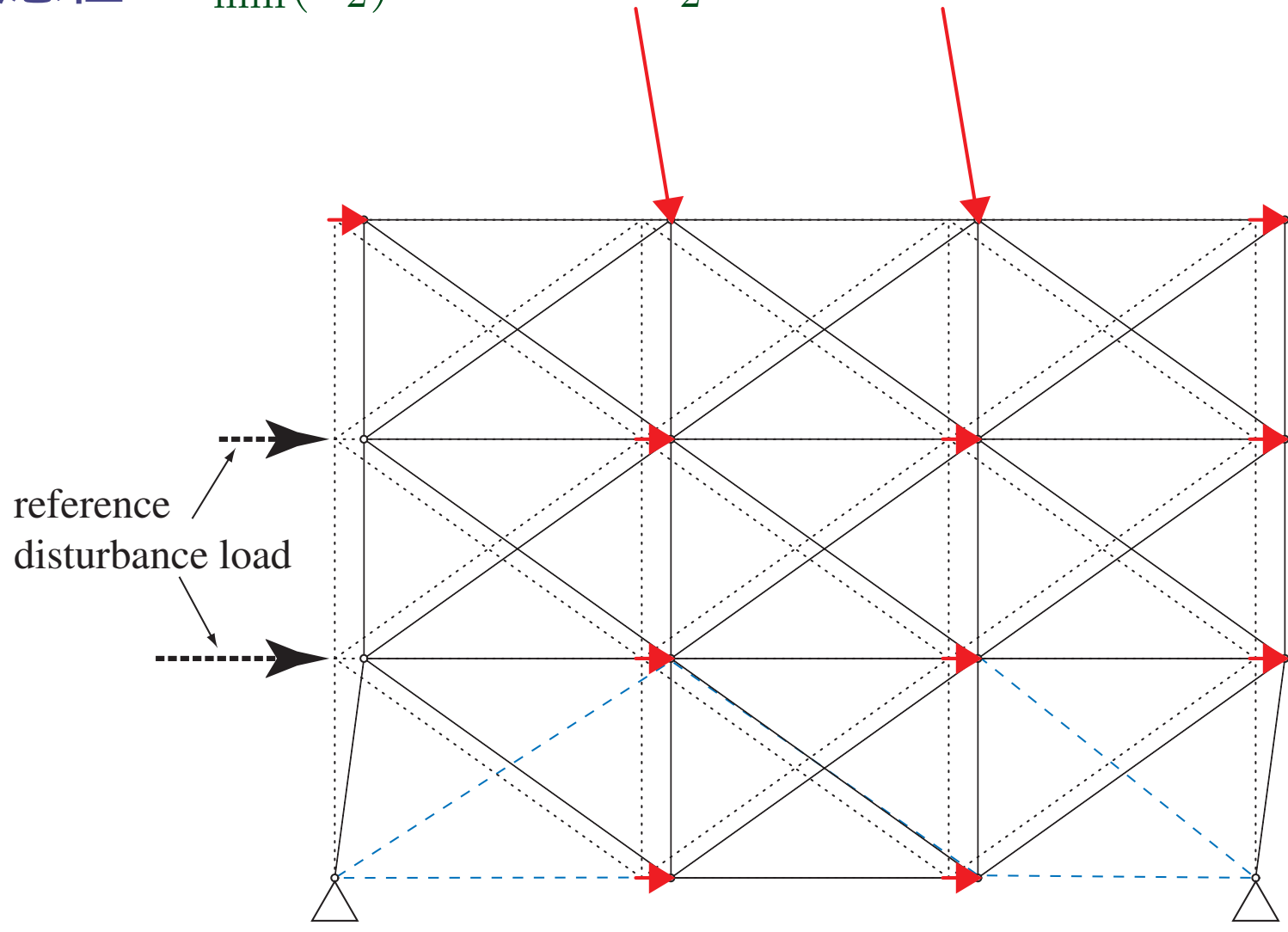
例題 (28 自由度, 42 部材)

- 最悪値 : $\lambda_{\min}(\alpha_1) = 37.0$ $\alpha_1 = 40.0$ kN



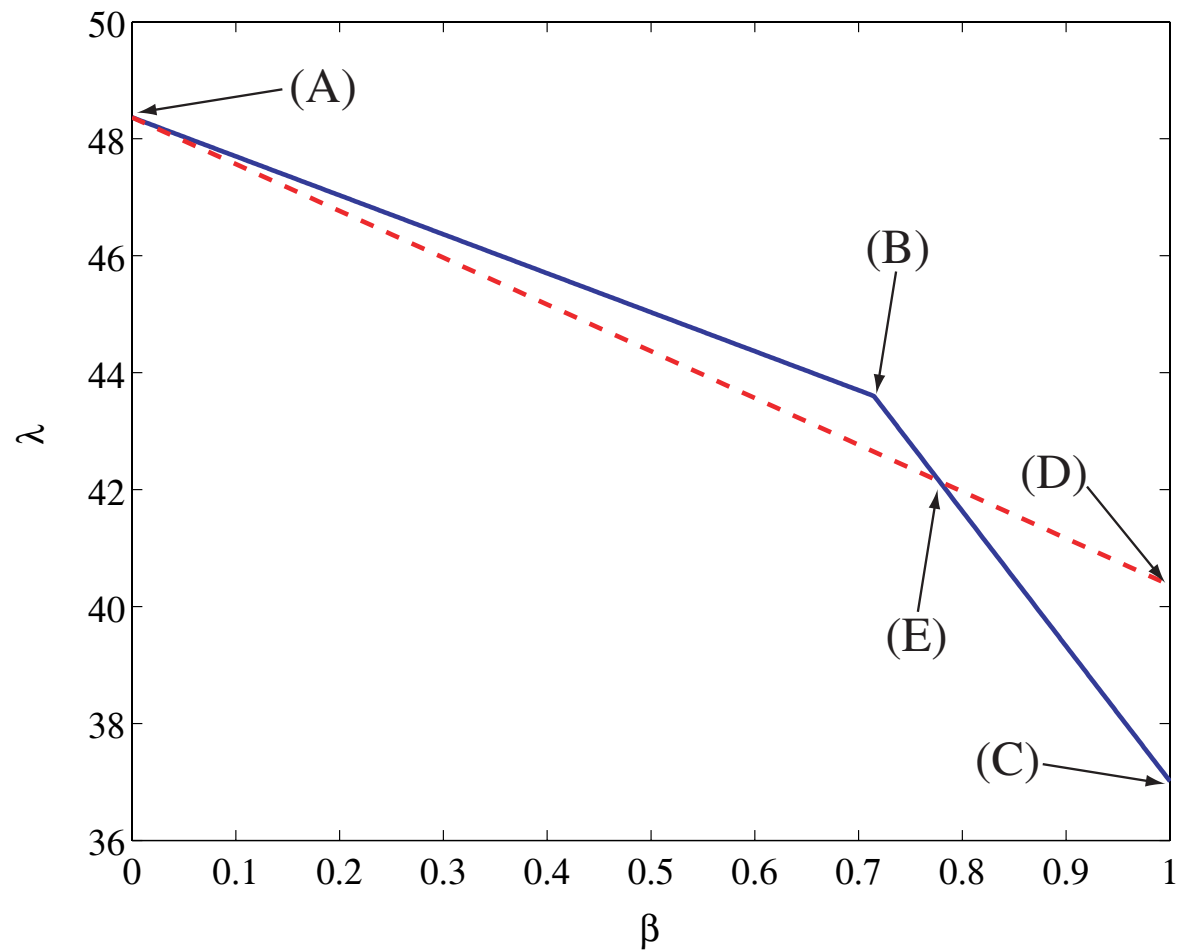
例題 (28 自由度, 42 部材)

- 最悪値 : $\lambda_{\min}(\alpha_2) = 44.4$ $\alpha_2 = 20.0 \text{ kN}$



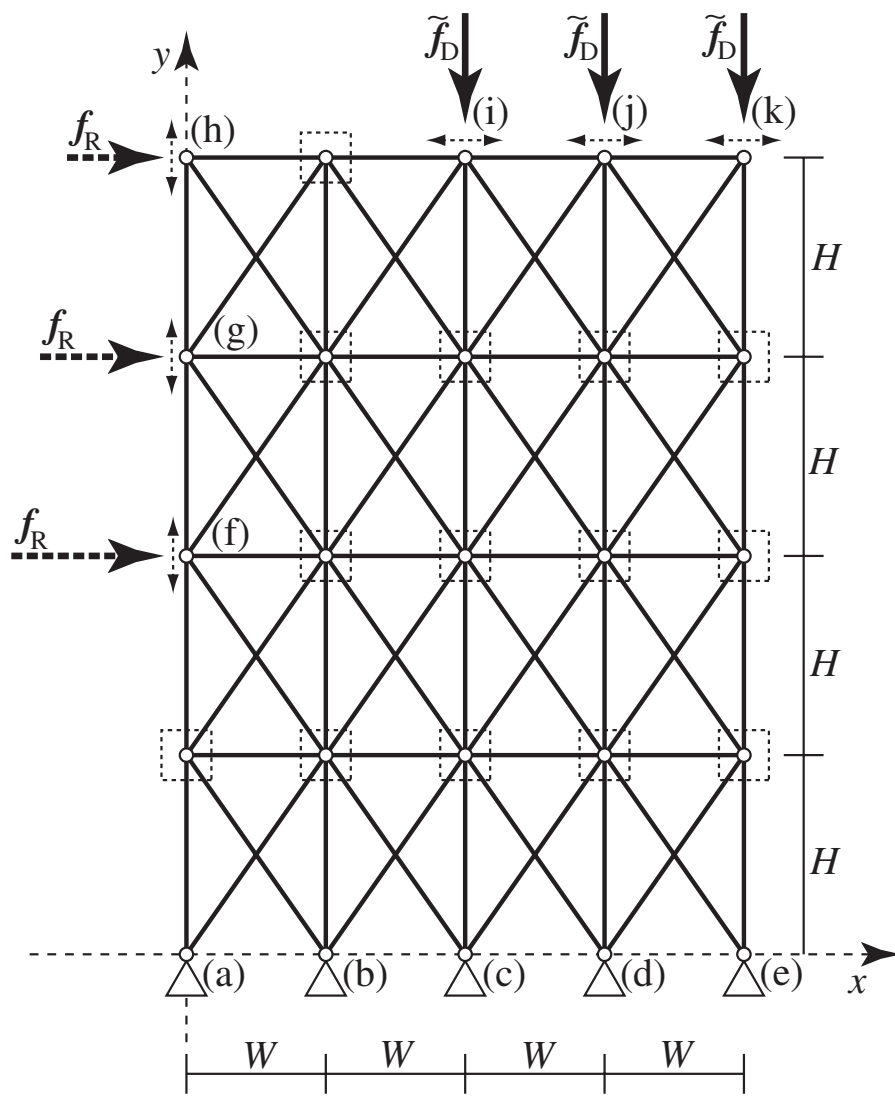
例題 (28 自由度, 42 部材)

- — : $\lambda^*(\beta f_{D1}^*)$ - - : $\lambda^*(2\beta f_{D2}^*)$
- クリティカル外乱, 最悪値, モード : α に依存



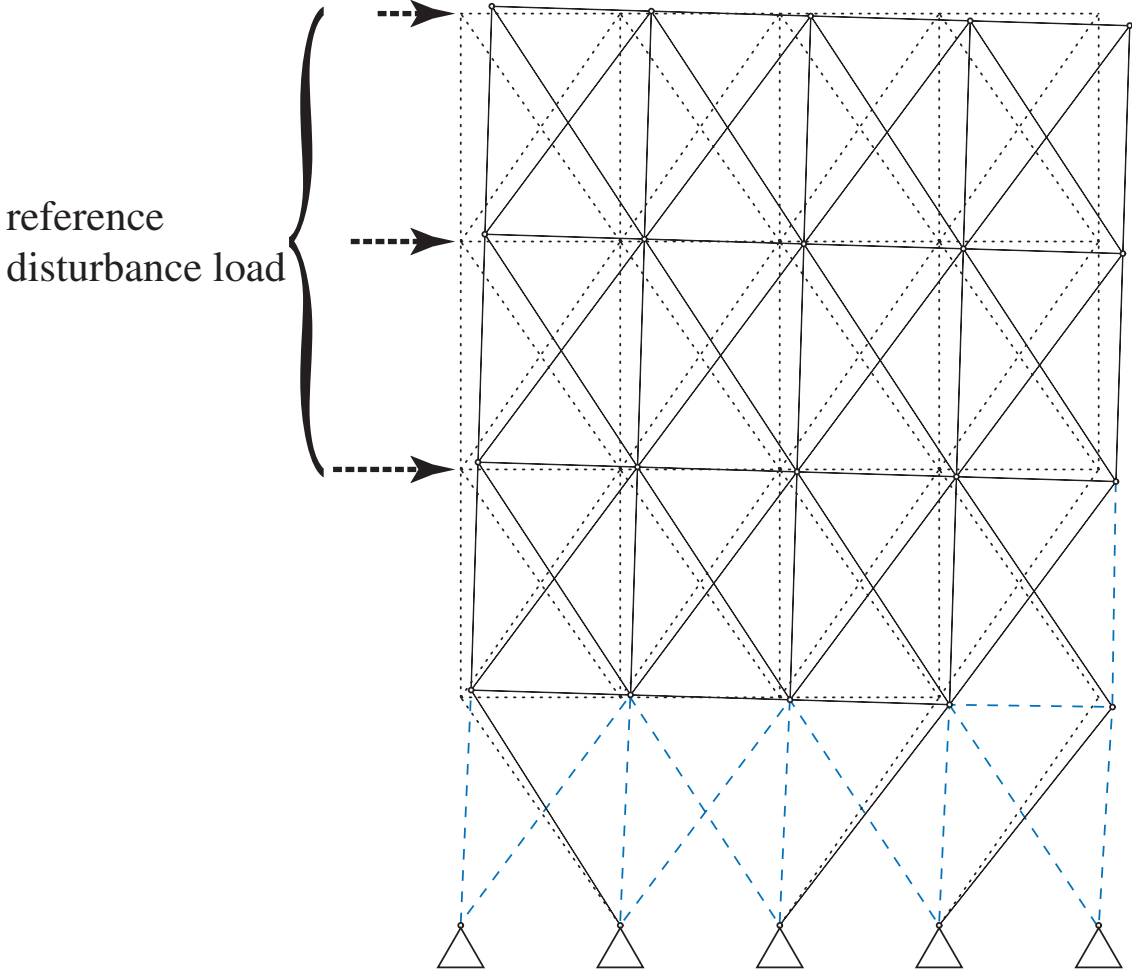
例題 (40 自由度, 68 部材)

● f_D が不確定



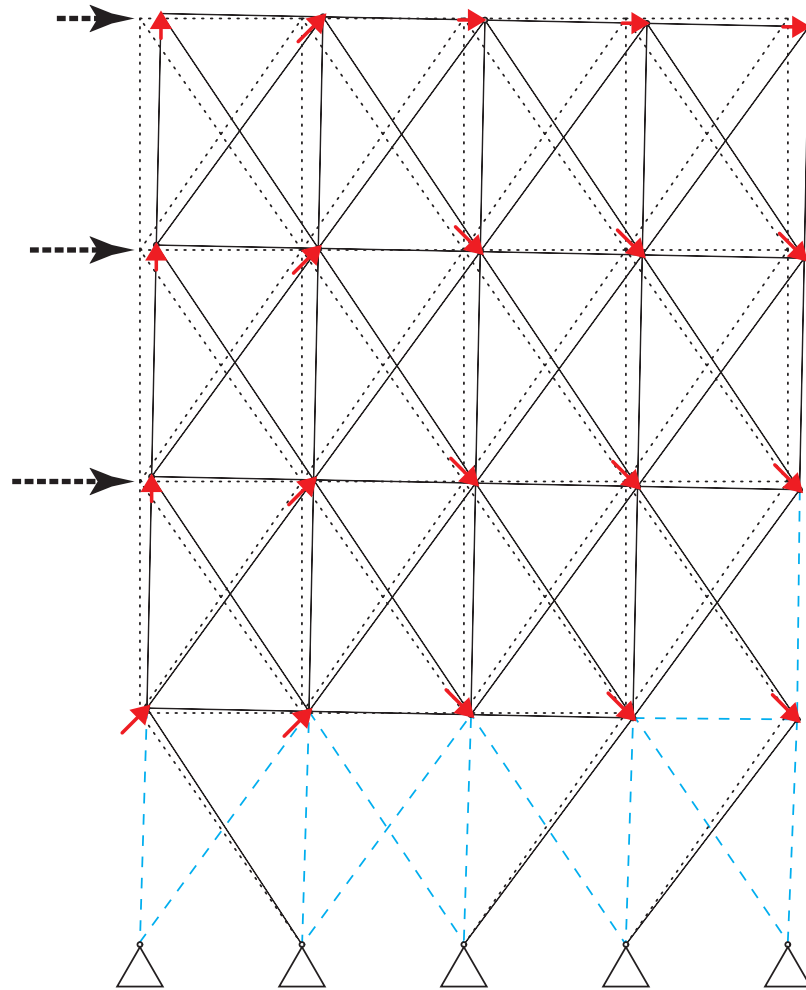
例題 (40 自由度, 68 部材)

● 公称値 : $\lambda^*(\tilde{f}_D) = 14.3$



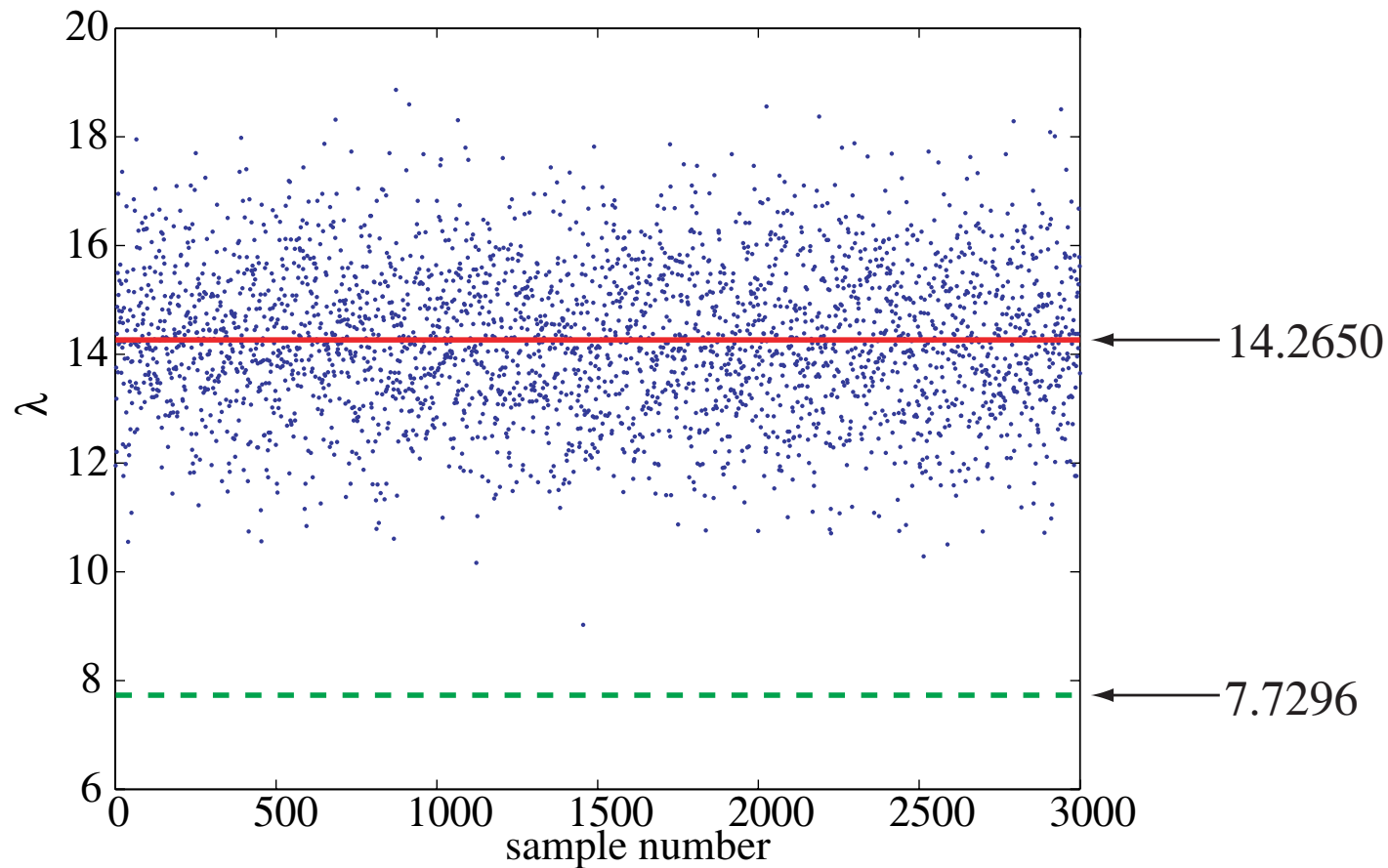
例題 (40 自由度, 68 部材)

- 最悪値 : $\lambda_{\min}(\alpha_1) = 7.73$ $\alpha_1 = 40.0 \text{ kN}$
- カット : 34
- B&B : 9 LPs



例題 (40 自由度, 68 部材)

- ランダムに生成した外力に対する崩壊荷重係数



- 極限解析
 - 外力の不確定性 (非確率論的)
 - 最悪崩壊荷重係数・クリティカル外乱を定義
- 大域的最適化 (カット分枝法)
 - 混合 0-1 計画問題
 - 離接カット
 - ‘deepest cut’ を生成する LP 問題
- 最悪ケース
 - 崩壊荷重係数が大きく低下
 - 崩壊モードが変化
 - 最悪荷重は自明ではない