

交互方向乗数法による
一様断面を有するトラスの位相最適化

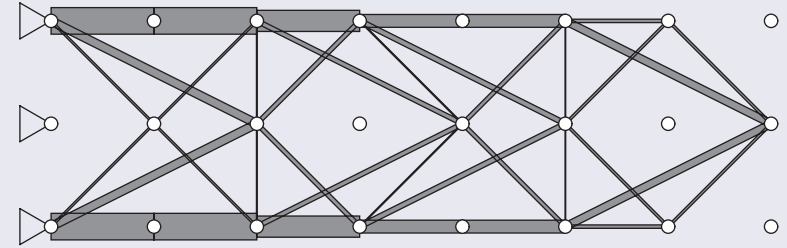
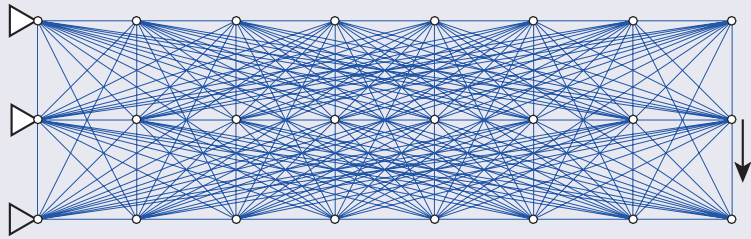
寒野 善博

東京大学 数理・情報教育研究センター

October 15–16, 2018 (OPTIS 2018)

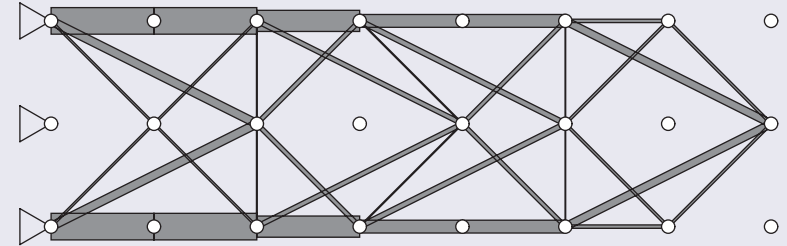
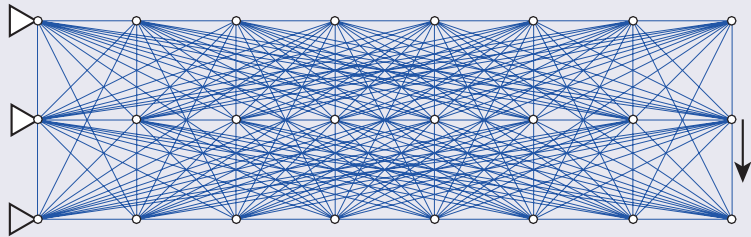
動機：一様断面を有するトラス

- コンプライアンス最小化の典型的な最適解：



動機：一様断面を有するトラス

- コンプライアンス最小化の典型的な最適解：



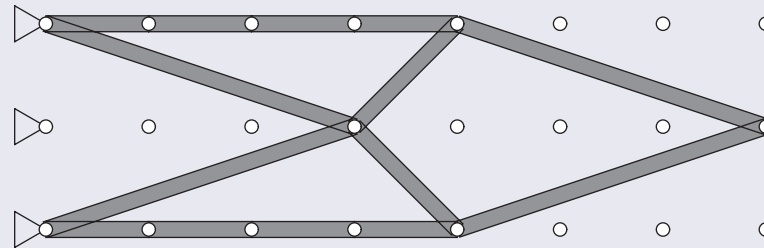
- 断面積の種類を気にしてみる.
 - ほとんどの部材が異なる断面積をもつ.
 - ← 実用的とは言えない.
 - ロットサイズ
 - 製造上の間違いのもと

動機：一様断面を有するトラス

- コンプライアンス最小化の典型的な最適解：



- 一様断面からなる最適解

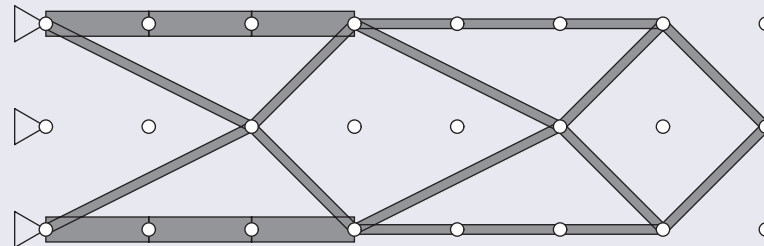


動機：一様断面を有するトラス

- コンプライアンス最小化の典型的な最適解：



- 2種類の断面からなる最適解



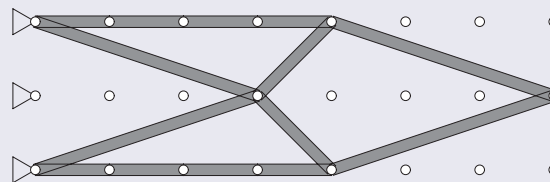
動機：一様断面を有するトラス

- コンプライアンス最小化の典型的な最適解：



- 新しい制約：“異なる断面の種類数” $\leq n$

- $n = 1$ は一様断面



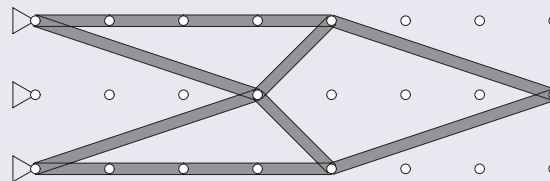
動機：一様断面を有するトラス

- コンプライアンス最小化の典型的な最適解：



- 新しい制約：“異なる断面の種類数” $\leq n$

- $n = 1$ は一様断面



- 混合整数2次錐計画に帰着可能 [Kanno '16]

- 大域解が得られる（分枝限定法，整数計画ソルバー）. (pros)

- 大きな問題は解けない. (cons)

- → 大きな問題にも適用可能な発見的解法へ（さしあたり $n = 1$ ）

基本戦略：発見的解法

- **ADMM** (= alternating direction method of multipliers)
 - 非凸な問題に適用するので,
 - 収束するとは限らない.
 - 得られる解は 初期点やペナルティパラメータに依存する.
 - 実験的には 20 反復程度で収束することが多い.
 - 初期点をランダムに生成して, ADMM を多スタート
- **ADMM** の構造最適化への応用
 - 節点数制約付きトラスの最適化 [Kanno & Fujita @ D&S '17, *OPTTE*]
 - 混合整数非線形計画 [Kanno & Kitayama @ ACSMO '18, *SMO*]

ADMM (交互方向乗数法)

- 次の形の問題を解く :

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ \text{s. t.} & A\mathbf{x} + B\mathbf{z} = \mathbf{c}. \end{array}$$

- f, g : 凸 \mathbf{x}, \mathbf{z} : 設計変数

ADMM (交互方向乗数法)

- 次の形の問題を解く :

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ \text{s. t.} & A\mathbf{x} + B\mathbf{z} = \mathbf{c}. \end{array}$$

- f, g : 凸 \mathbf{x}, \mathbf{z} : 設計変数
- もともとは, [Glowinski & Marrocco '75], [Gabay & Mercier '76]
 - 凸 な問題を解く手法
 - 分散最適化
- 近年, 非凸 な問題の発見的解法として注目
 - 機械学習 [Chartrand '07], [Kanamori & Takeda '14]
 - 混合整数 凸 2 次計画など [Takapoui, Moehle, Boyd, & Bemporad '18]
 - 構造最適化 [K. & Kitayama '18], [K. & Fujita '18]

ADMM の基礎

- 解きたい問題 ($f, g : \text{凸}$) :

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ \text{s. t.} & A\mathbf{x} + B\mathbf{z} = \mathbf{c}. \end{array}$$

- 拡張 Lagrange 関数 :

$$\begin{aligned} L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{y}) = & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ & + \mathbf{y}^\top (A\mathbf{x} + B\mathbf{z} - \mathbf{c}) + \frac{\rho}{2} \|A\mathbf{x} + B\mathbf{z} - \mathbf{c}\|^2 \end{aligned}$$

- \mathbf{y} : Lagrange 乗数 $\rho > 0$: ペナルティパラメータ

ADMM の基礎

- 解きたい問題 ($f, g : \text{凸}$) :

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ \text{s. t.} \quad & A\mathbf{x} + B\mathbf{z} = \mathbf{c}. \end{aligned}$$

- 拡張 Lagrange 関数 :

$$\begin{aligned} L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{y}) = & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ & + \mathbf{y}^\top (A\mathbf{x} + B\mathbf{z} - \mathbf{c}) + \frac{\rho}{2} \|A\mathbf{x} + B\mathbf{z} - \mathbf{c}\|^2 \end{aligned}$$

- \mathbf{y} : Lagrange 乗数 $\rho > 0$: ペナルティパラメータ
- ADMM の反復 :

$$\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}^k; \mathbf{y}^k) \text{ の最小解,} \quad (\text{主-1})$$

$$\mathbf{z}^{k+1} \leftarrow L_\rho(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}; \mathbf{y}^k) \text{ の最小解,} \quad (\text{主-2})$$

$$\mathbf{y}^{k+1} \leftarrow \mathbf{y}^k + \rho(A\mathbf{x}^{k+1} + B\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{c}). \quad (\text{双対})$$

ADMM の基礎

- 解きたい問題 ($f, g : \text{凸}$) :

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ \text{s. t.} \quad & A\mathbf{x} + B\mathbf{z} = \mathbf{c}. \end{aligned}$$

- 拡張 Lagrange 関数 :

$$\begin{aligned} L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{y}) = & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ & + \mathbf{y}^\top (A\mathbf{x} + B\mathbf{z} - \mathbf{c}) + \frac{\rho}{2} \|A\mathbf{x} + B\mathbf{z} - \mathbf{c}\|^2 \end{aligned}$$

- \mathbf{y} : Lagrange 乗数 $\rho > 0$: ペナルティパラメータ
- ちなみに, 乗数法 :

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) & \leftarrow L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{y}^k) \text{ の最小解,} & \text{(主)} \\ \mathbf{y}^{k+1} & \leftarrow \mathbf{y}^k + \rho(A\mathbf{x}^{k+1} + B\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{c}). & \text{(双対)} \end{aligned}$$

- ADMM が有用になり得るのは, 「 \mathbf{x} と \mathbf{z} を個別に最小化」が「同時に最小化」よりも容易な場合

提案手法 (1/2)

- 解きたい問題 ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ は部材断面積) :

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & \phi(\mathbf{x}) \\ \text{s. t.} & \mathbf{x} \in (\text{体積制約}), \quad \mathbf{x} \in (\text{一様性}). \end{array}$$

- $\phi(\mathbf{x})$: コンプライアンス
- 正確に書くと,

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x} \in (\text{体積制約}) & \Leftrightarrow \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = V, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x} \in (\text{一様性}) & \Leftrightarrow \exists s : \mathbf{x} \in \{0, s\}^m, \mathbf{x} \in (\text{一様性}). \end{array}$$

提案手法 (1/2)

- 解きたい問題 ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ は部材断面積) :

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & \phi(\mathbf{x}) \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in (\text{体積制約}), \quad \mathbf{x} \in (\text{一様性}). \end{aligned}$$

- $\phi(\mathbf{x})$: コンプライアンス

- 問題を書き直すと,

$$\begin{aligned} \text{Min. } \phi(\mathbf{x}) \quad \text{s. t. } \mathbf{x} = \mathbf{z}, & \quad (\spadesuit-1) \\ \mathbf{x} \in (\text{体積制約}), \quad \mathbf{z} \in (\text{一様性}). & \quad (\spadesuit-2) \end{aligned}$$

- 拡張 Lagrange 関数 :

$$L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^\top (\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 \quad \text{with } (\spadesuit-2).$$

- スケーリング $\mathbf{v} = \mathbf{y}/\rho$:

$$L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \quad \text{with } (\spadesuit-2).$$

提案手法 (2/2)

- あらためて, 拡張 Lagrange 関数は

$$L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{v}) = \phi(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{v}\|^2$$

with $\mathbf{x} \in (\text{体積制約}), \mathbf{z} \in (\text{一様性}).$

- ADMM の反復 :

$$\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}^k; \mathbf{v}^k) \text{ の最小解,} \quad (\text{主-1})$$

$$\mathbf{z}^{k+1} \leftarrow L_\rho(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}; \mathbf{v}^k) \text{ の最小解,} \quad (\text{主-2})$$

$$\mathbf{v}^{k+1} \leftarrow \mathbf{v}^k + \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^{k+1}. \quad (\text{双対})$$

提案手法 (2/2)

- あらためて, 拡張 Lagrange 関数は

$$L_{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{v}) = \phi(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{v}\|^2$$

with $\mathbf{x} \in (\text{体積制約}), \mathbf{z} \in (\text{一様性}).$

- 主変数の更新 :

$$\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow L_{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z}^k; \mathbf{v}^k) \text{ の最小解,} \quad (\text{主-1})$$

$$\mathbf{z}^{k+1} \leftarrow L_{\rho}(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}; \mathbf{v}^k) \text{ の最小解,} \quad (\text{主-2})$$

- \mathbf{x} の更新 :

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & \phi(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}^k + \mathbf{v}^k\|^2 \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in (\text{体積制約}). \end{aligned}$$

- 単なるコンプライアンス最小化と ほぼ同様に解ける.
 - 凸2次のペナルティが加わったのみの 凸最適化問題

提案手法 (2/2)

- あらためて，拡張 Lagrange 関数は

$$L_{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{v}) = \phi(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{v}\|^2$$

with $\mathbf{x} \in (\text{体積制約})$, $\mathbf{z} \in (\text{一様性})$.

- \mathbf{z} の更新：

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & \frac{\rho}{2} \|(\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{v}^k) - \mathbf{z}\|^2 \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{z} \in (\text{一様性}). \end{aligned}$$

≡ 点 $\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{v}^k$ を，最も近い“(一様な設計解)”に丸める。

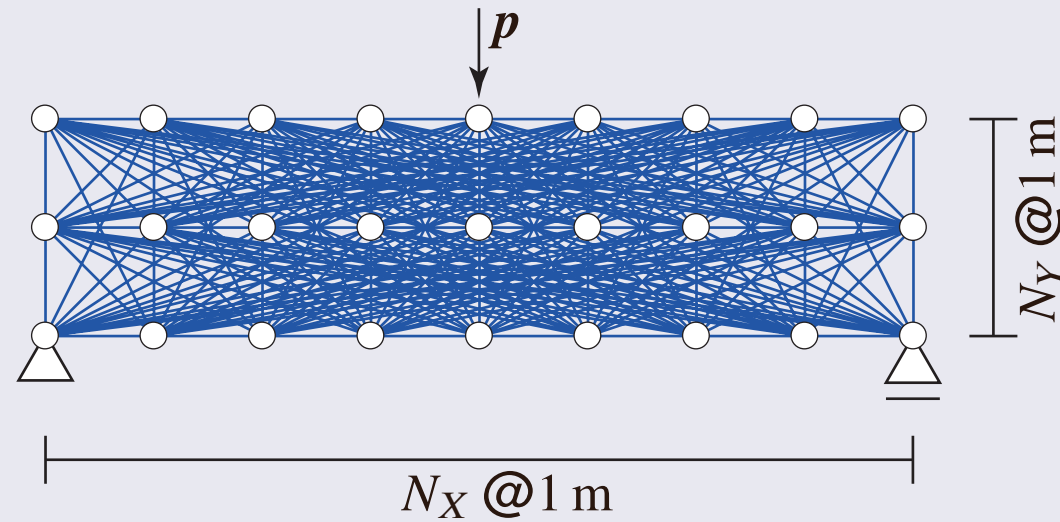
- 点 $\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{v}^k$ の成分を，大きい順に並べ替える。
- 丸め込む先の候補は m 個：
 - 一番大きい成分のみで体積が V ，他は 0
 - 大きい二つの成分が共通の値をとって体積が V ，他は 0
 - 大きい三つの成分が …

数値実験

- Matlab で実装
 - 部分問題：SDPT3 ver. 4.0（主双対内点法）
- ADMMM を多スタート
 - 初期点をランダムに複数個生成
 - 最良の解を出力
- ペナルティパラメータ $\rho = 1$
 - ADMM が実行不能解に収束したら、 $\rho \leftarrow 10\rho$ とする.
- 比較：混合整数2次錐計画（大域的最適化）
 - CPLEX ver. 12.8.0

数値実験 (1)

- 問題設定

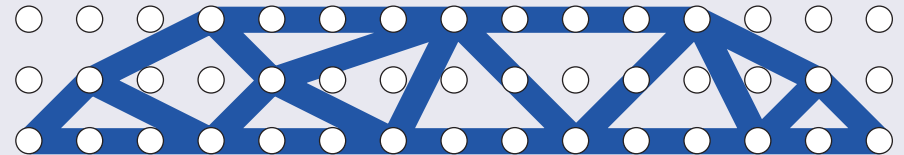
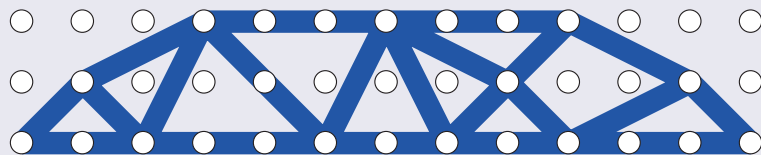
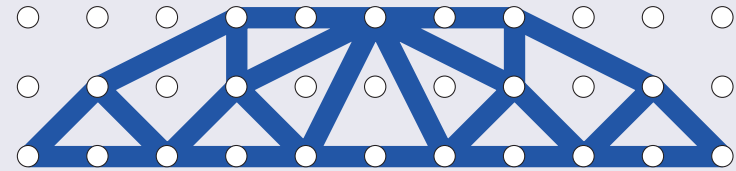
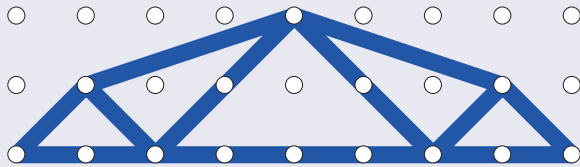


- 問題のサイズ

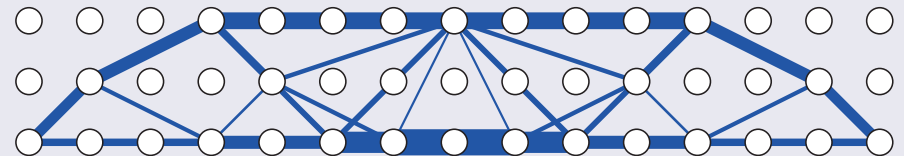
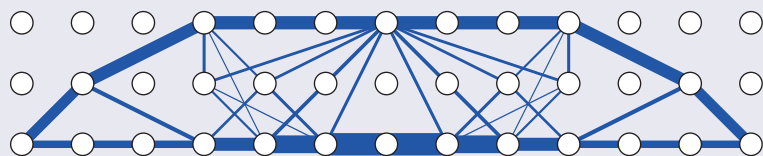
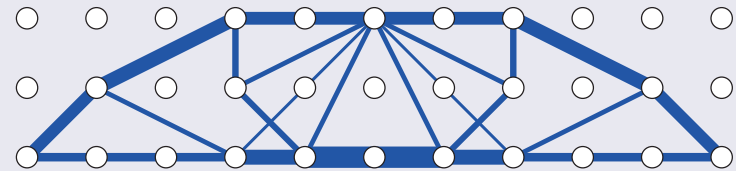
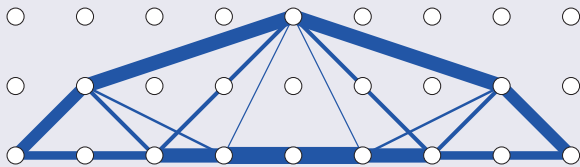
(N_X, N_Y)	部材数	自由度数
(8, 2)	226	51
(10, 2)	332	63
(12, 2)	458	75
(14, 2)	604	87

数値実験 (1)

- 提案手法で得られた解

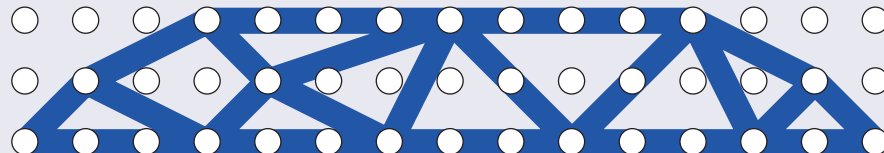
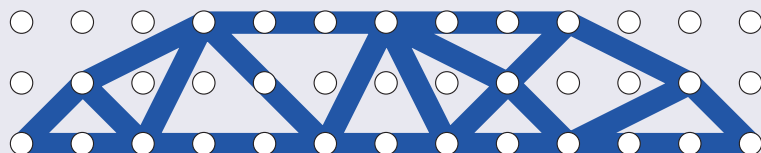
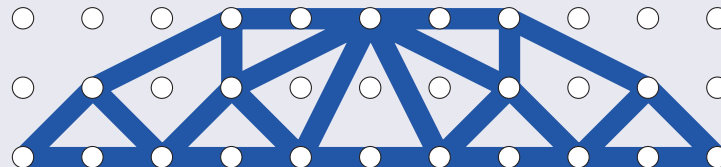
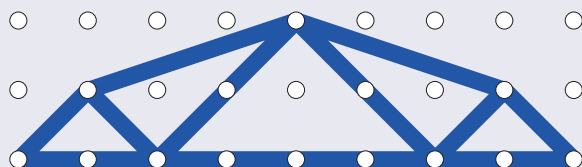


- 単純なコンプライアンス最小化の解

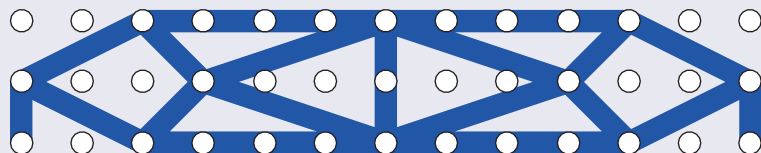
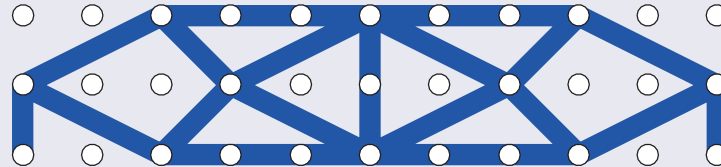
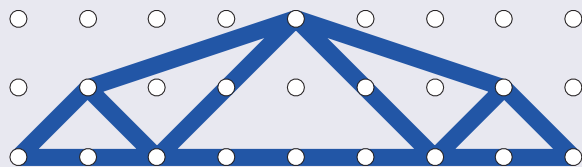


数値実験 (1)

- 提案手法で得られた解



- 整数計画 (CPLEX) による大域解

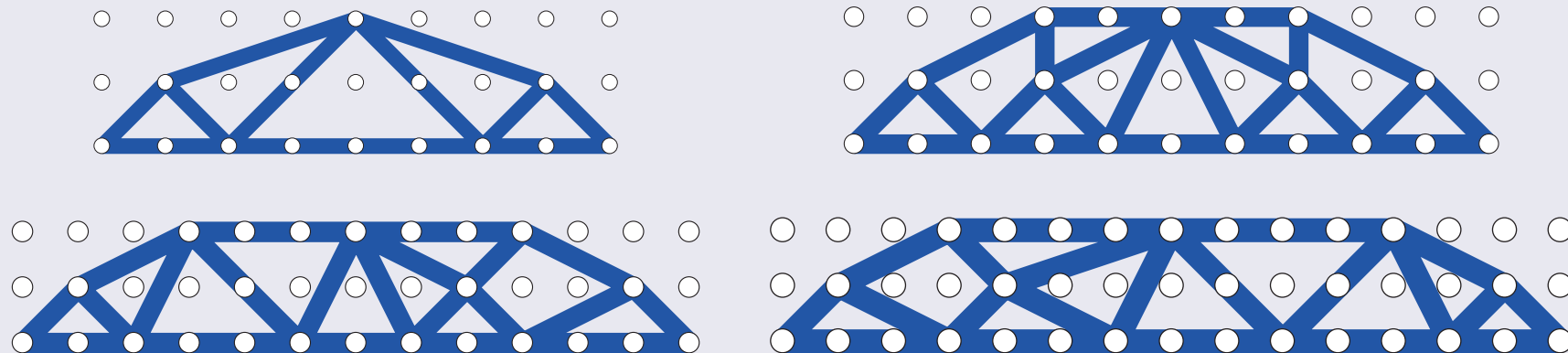


(> 4500 s)

- 提案手法の初期点は 通常のコンプライアンス最小化の解を参考に生成している.

数値実験 (1)

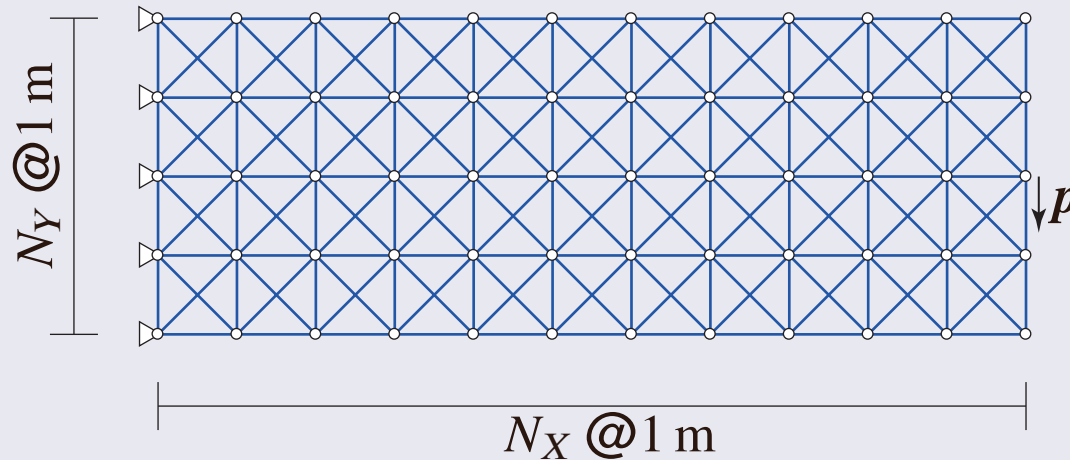
- 提案手法で得られた解



問題	ADMM				MISOCP	
	#trials	ϕ^* (J)	#iter	Time (s)	$\bar{\phi}$ (J)	Time (s)
(8, 2)	20	915.58	11.7	6.8	915.58	24.8
(10, 2)	20	1536.32	14.3	14.4	1388.76	105.8
(12, 2)	100	2400.22	19.3	34.2	2107.35	8563.5
(14, 2)	100	3297.17	15.8	45.0	(3305.80)	(> 4500.0)

数値実験 (2)

- 問題設定

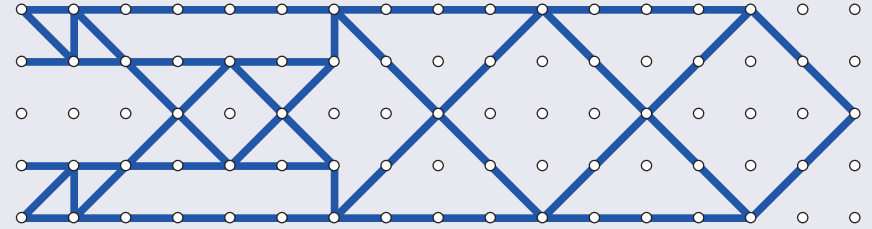
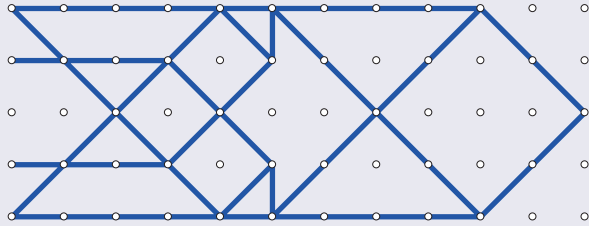


- 問題のサイズ (CPLEX で解ききることは困難)

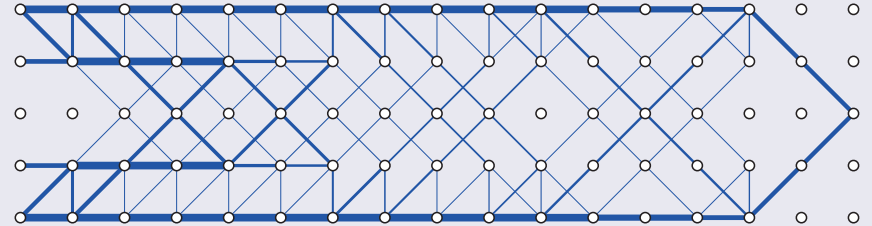
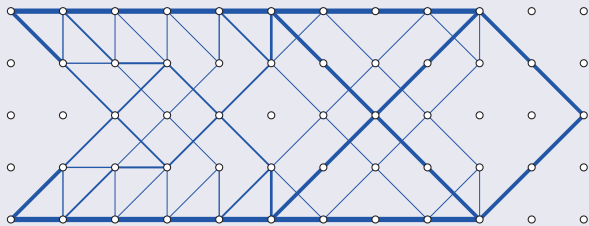
(N_X, N_Y)	部材数	自由度数
(11, 4)	191	110
(16, 4)	276	160
(26, 6)	656	364
(30, 8)	998	540

数値実験 (2)

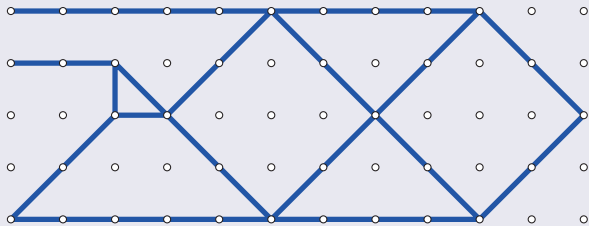
- 提案手法で得られた解



- 単純なコンプライアンス最小化の解

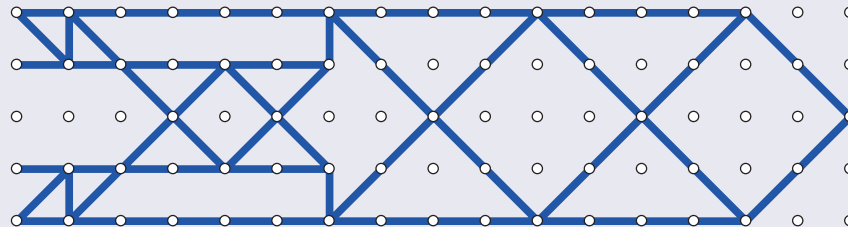
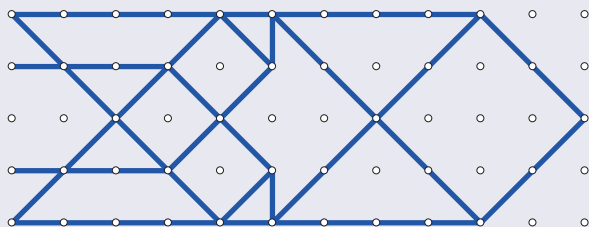


- 整数計画 (CPLEX) による大域解 (計算時間は約 3 h)

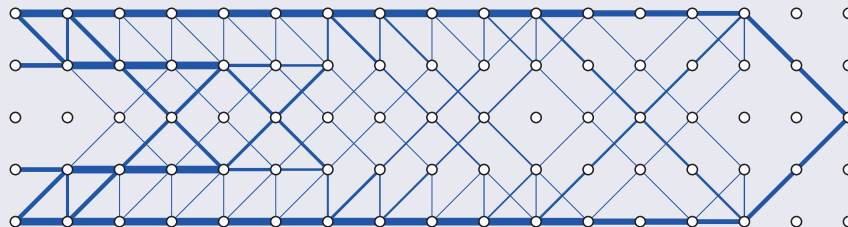
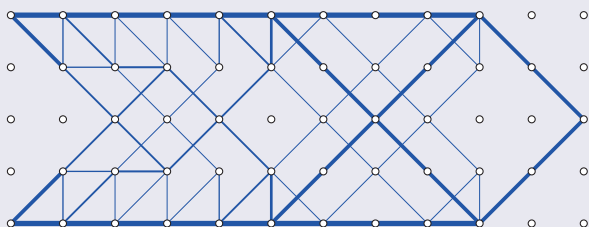


数値実験 (2)

- 提案手法で得られた解



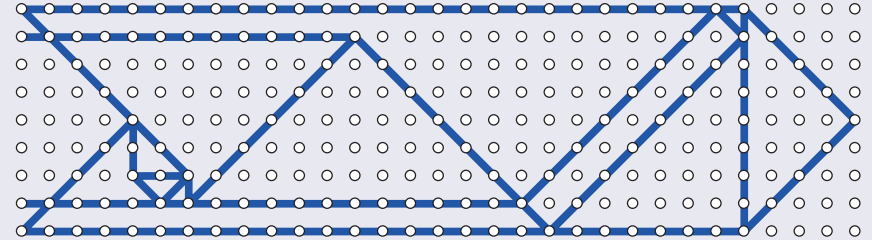
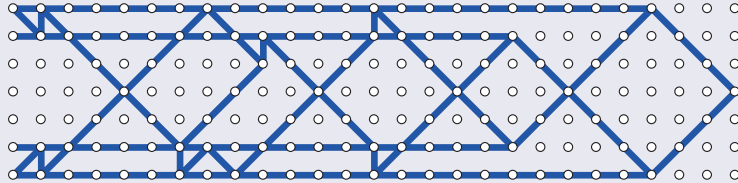
- 単純なコンプライアンス最小化の解



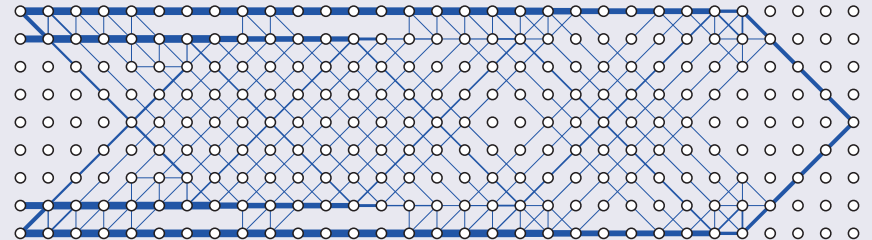
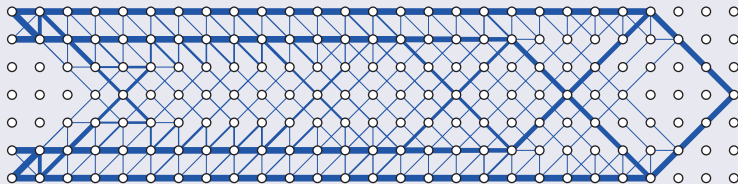
問題	ADMM				単純な最小化
	#trials	ϕ^* (J)	#iter	Time (s)	$\phi_{\text{continuous}}$ (J)
(11, 4)	20	4325.55	20.1	15.4	3464.18
	50	4325.55	19.4	14.6	
(16, 4)	20	11200.60	14.1	20.2	9042.51
	50	11200.60	14.8	21.5	

数値実験 (2)

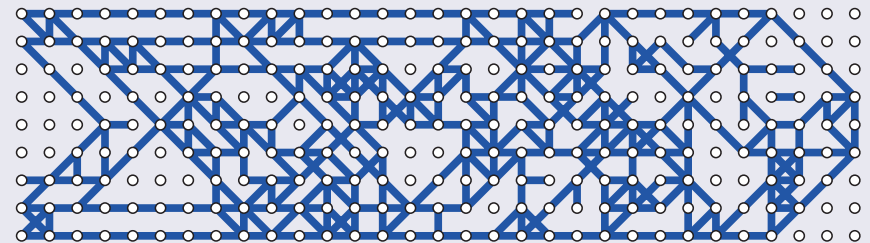
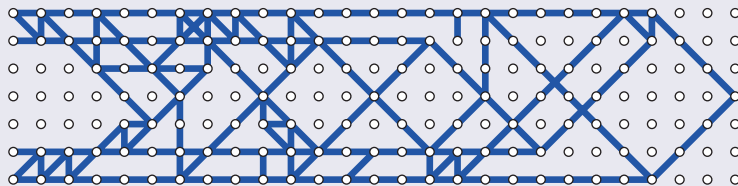
- 提案手法で得られた解



- 単純なコンプライアンス最小化の解

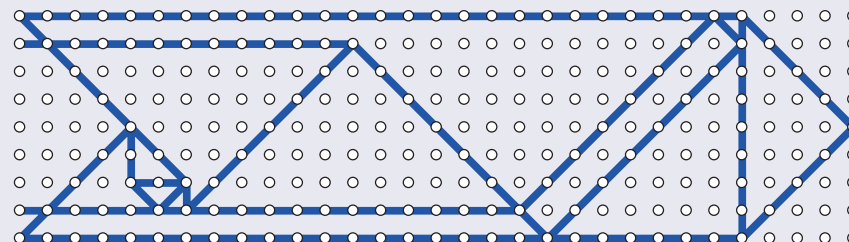
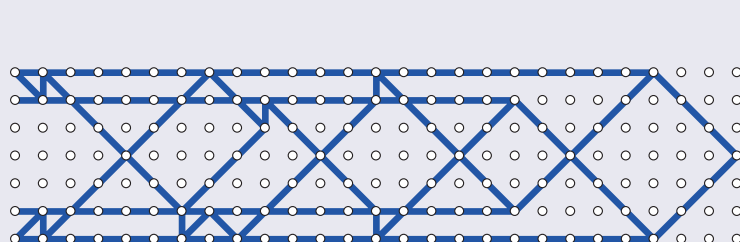


- 参考 : CPLEX で 3h かけて得られたうちの最良のもの

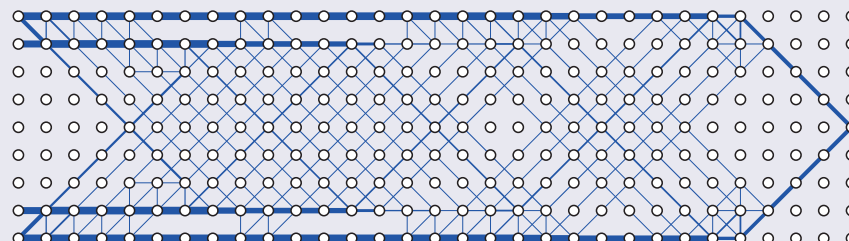
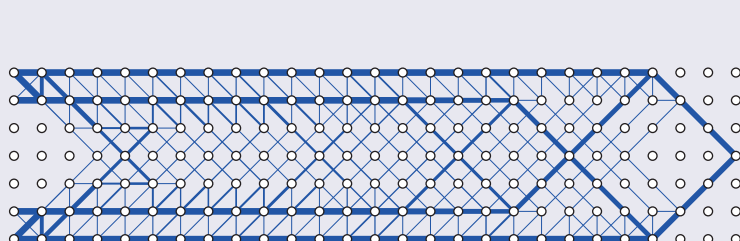


数値実験 (2)

- 提案手法で得られた解



- 単純なコンプライアンス最小化の解



問題	ADMM				単純な最小化
	#trials	ϕ^* (J)	#iter	Time (s)	$\phi_{\text{continuous}}$ (J)
(11, 4)	20	14324.39	25.1	324.7	12545.03
	50	13972.17	25.8	332.2	
(16, 4)	7	10406.54	28.0	1406.8	6924.89
	20	9034.04	28.1	1402.5	

まとめ

- 一様な断面をもつトラスの最適設計
 - 組み合わせ的な問題（どの部材を用いるか）
 - ADMM（交互方向乗数法）による発見的解法
 - ランダムな初期解からの多スタート
- 提案した ADMM
 - 収束や最適性の保証はない.
 - 簡単で、実装も容易.
 - 各反復は、凸最適化 と 一様な解への丸め
 - “通常のコンプライアンス最小化 + ペナルティ” と解釈できる.
 - 整数計画では扱えない規模の問題にも適用可能
 - それなりの質の解が得られることが多い.