

交互方向乗数法による
混合整数非線形計画の発見的解法

寒野 善博[†] 北山 哲士[‡]

[†] 東京大学 [‡] 金沢大学

日本オペレーションズ・リサーチ学会 2018 年秋季研究発表会 (Sep. 6–7, 2018)

混合整数非線形計画

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s. t.} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m), \\ & x_1, \dots, x_r \quad : \text{離散変数,} \\ & x_{r+1}, \dots, x_n \quad : \text{連続変数.} \end{array}$$

- f, g_1, \dots, g_m : 凸とは限らない

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s. t.} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m), \\ & x_1, \dots, x_r \quad : \text{離散変数,} \\ & x_{r+1}, \dots, x_n \quad : \text{連続変数.} \end{array}$$

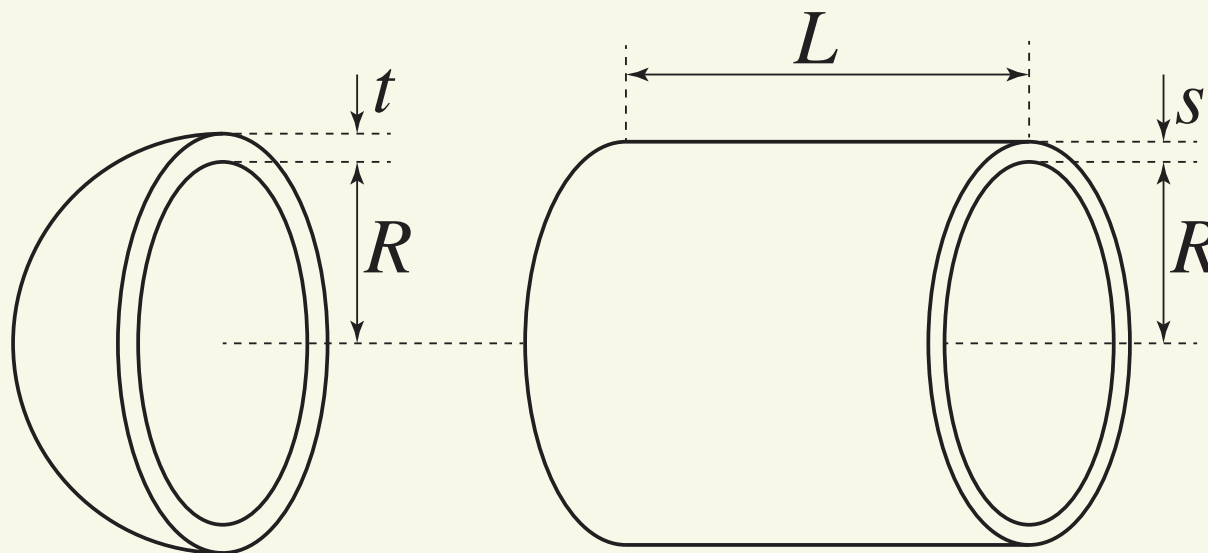
- f, g_1, \dots, g_m : 凸とは限らない
- ADMM に基づく 発見的解法の提案
 - 簡単, 実装も容易.
 - 計算コストが小さい.
 - しばしば それなりの質の解が得られる.
- メタ解法
 - 計算コストが大きいことが多い.

応用例 (1/2)

- 圧力器の最適設計

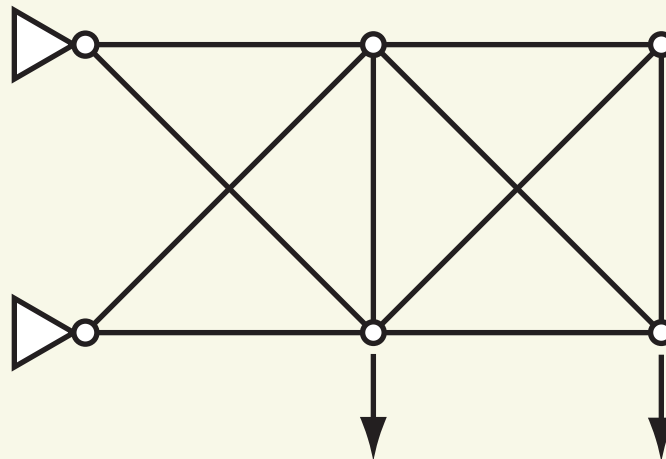
[Sandgren '90]

- 決定変数は 4 つ
 - s, t : 離散 (カタログから選択)
 - L, R : 連続
- 製造コスト (非凸関数) の最小化
- 制約 : ASME の設計指針 (非凸)



応用例 (2/2)

- 離散断面をもつトラス構造の最適設計
 - 決定変数
 - 部材（枝）の断面積：離散（カタログから）
 - 物理量（変位や応力）：連続
 - 設計に用いる材料の体積（重量）の最小化
 - 制約：変位や応力が制限値以下
 - 釣合い式：設計と物理量との関係（非凸）



- ADMM を多スタート
 - 初期点をランダムに生成
- ADMM = 交互方向乗数法
 - 非凸な問題に適用するので,
 - 収束するとは限らない.
 - 得られる解は 初期点やペナルティパラメータに依存する.
 - 実験的には 20 反復程度で収束することが多い.

ADMM (交互方向乗数法)

- 次の形の問題を解く :

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ \text{s. t.} & A\mathbf{x} + B\mathbf{z} = \mathbf{c}. \end{array}$$

- f, g : 凸 \mathbf{x}, \mathbf{z} : 決定変数

ADMM (交互方向乗数法)

- 次の形の問題を解く :

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ \text{s. t.} & A\mathbf{x} + B\mathbf{z} = \mathbf{c}. \end{array}$$

- f, g : 凸 \mathbf{x}, \mathbf{z} : 決定変数
- もともとは, [Glowinski & Marrocco '75], [Gabay & Mercier '76]
 - 凸 な問題を解く手法
 - 分散最適化
- 近年,
 - 非凸 な問題の発見的解法として注目
 - 機械学習 [Chartrand '07], [Kanamori & Takeda '14]
 - 混合整数 凸 2 次計画など [Takapoui, Moehle, Boyd, & Bemporad '18]

ADMM の基礎

- 解きたい問題 ($f, g : \text{凸}$) :

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ \text{s. t.} & A\mathbf{x} + B\mathbf{z} = \mathbf{c}. \end{array}$$

- 拡張 Lagrange 関数 :

$$\begin{aligned} L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{y}) = & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ & + \mathbf{y}^\top (A\mathbf{x} + B\mathbf{z} - \mathbf{c}) + \frac{\rho}{2} \|A\mathbf{x} + B\mathbf{z} - \mathbf{c}\|^2 \end{aligned}$$

- \mathbf{y} : Lagrange 乗数 $\rho > 0$: ペナルティパラメータ

ADMM の基礎

- 解きたい問題 ($f, g : \text{凸}$) :

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ \text{s. t.} \quad & A\mathbf{x} + B\mathbf{z} = \mathbf{c}. \end{aligned}$$

- 拡張 Lagrange 関数 :

$$\begin{aligned} L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{y}) = & f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ & + \mathbf{y}^\top (A\mathbf{x} + B\mathbf{z} - \mathbf{c}) + \frac{\rho}{2} \|A\mathbf{x} + B\mathbf{z} - \mathbf{c}\|^2 \end{aligned}$$

- \mathbf{y} : Lagrange 乗数 $\rho > 0$: ペナルティパラメータ
- ADMM の反復 :

$$\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}^k; \mathbf{y}^k) \text{ の最小解,} \quad (\text{主-1})$$

$$\mathbf{z}^{k+1} \leftarrow L_\rho(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}; \mathbf{y}^k) \text{ の最小解,} \quad (\text{主-2})$$

$$\mathbf{y}^{k+1} \leftarrow \mathbf{y}^k + \rho(A\mathbf{x}^{k+1} + B\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{c}). \quad (\text{双対})$$

提案手法 (1/2)

- 簡単のため 連続変数なしの場合 :

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s. t.} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m), \quad (\rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{G} \text{ と書く}) \\ & x_1, \dots, x_n : \text{カタログから選ぶ.} \quad (\rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{D} \text{ と書く}) \end{array}$$

提案手法 (1/2)

- 簡単のため 連続変数なしの場合 :

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s. t.} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m), \quad (\rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{G} \text{ と書く}) \\ & x_1, \dots, x_n : \text{カタログから選ぶ.} \quad (\rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{D} \text{ と書く}) \end{array}$$

- 問題を書き直すと,

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & f(\mathbf{x}) \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{x} = \mathbf{z}, \quad (\spadesuit-1) \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{G}, \quad \mathbf{z} \in \mathcal{D}. \quad (\spadesuit-2) \end{array}$$

- 拡張 Lagrange 関数 :

$$L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^\top (\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 \quad \text{with } (\spadesuit-2).$$

- スケーリング $\mathbf{v} = \mathbf{y}/\rho$:

$$L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \quad \text{with } (\spadesuit-2).$$

提案手法 (2/2)

- あらためて 拡張 Lagrange 関数は,

$$L_{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{v}\|^2$$

with $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$, “ \mathbf{z} はカタログから”.

- ADMM の反復 :

$$\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow L_{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z}^k; \mathbf{v}^k) \text{ の最小解,} \quad (\text{主-1})$$

$$\mathbf{z}^{k+1} \leftarrow L_{\rho}(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}; \mathbf{v}^k) \text{ の最小解,} \quad (\text{主-2})$$

$$\mathbf{v}^{k+1} \leftarrow \mathbf{v}^k + \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^{k+1}. \quad (\text{双対})$$

提案手法 (2/2)

- あらためて 拡張 Lagrange 関数は,

$$L_{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{v}\|^2$$

with $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$, “ \mathbf{z} はカタログから”.

- 主変数の更新 :

$$\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow L_{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z}^k; \mathbf{v}^k) \text{ の最小解,} \quad (\text{主-1})$$

$$\mathbf{z}^{k+1} \leftarrow L_{\rho}(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}; \mathbf{v}^k) \text{ の最小解,} \quad (\text{主-2})$$

- \mathbf{x} の更新 :

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & f(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}^k + \mathbf{v}^k\|^2 \\ \text{s. t.} & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}. \end{array}$$

- 非線形計画を適用

- 局所最適性 (だが, 全体として発見的解法なので ...)

提案手法 (2/2)

- あらためて 拡張 Lagrange 関数は,

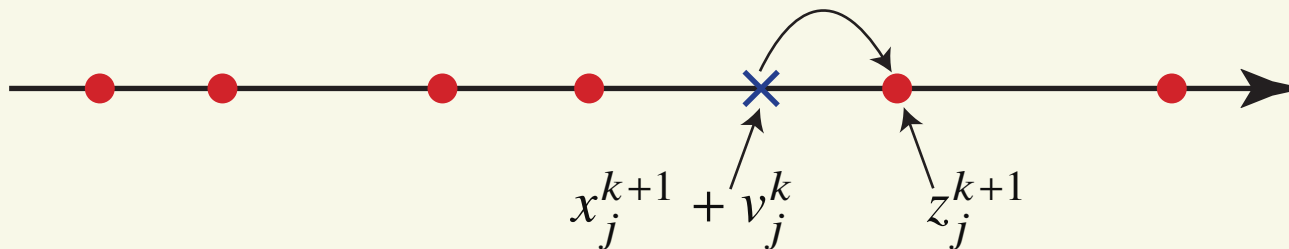
$$L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{v}\|^2$$

with $g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$, “ \mathbf{z} はカタログから”.

- \mathbf{z} の更新 :

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & \frac{\rho}{2} \|(\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{v}^k) - \mathbf{z}\|^2 \\ \text{s. t.} \quad & \text{“}\mathbf{z} \text{ はカタログから”}. \end{aligned}$$

- ≡ 点 $\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{v}^k$ をカタログ内の最も近い点に丸める.



数値実験

- Matlab で実装
 - 非線形計画のソルバー : `fmincon`
- ADMMM を多スタート
 - 初期点をランダムに 100 個 生成
 - 最良の解を出力
- ペナルティパラメータ $\rho = 100$
 - ADMM が実行不能解に収束したら, $\rho \leftarrow 10\rho$ とする.
- 機械系の最適設計におけるベンチマーク問題 (3 つ)

例題) 3 部材トラス構造の最適設計

- 部材の断面をカタログから選択 [Rao '96]

$$\text{Min. } 2x_1 + x_2 + \sqrt{2}x_3$$

$$\text{s. t. } \frac{\sqrt{3}x_2 + 1.932x_3}{1.5x_1x_2 + \sqrt{2}x_2x_3 + 1.319x_1x_3} \leq 1,$$

$$\frac{0.634x_1 + 2.828x_3}{1.5x_1x_2 + \sqrt{2}x_2x_3 + 1.319x_1x_3} \leq 1,$$

$$-1 \leq \frac{0.5x_1 - 2x_2}{1.5x_1x_2 + \sqrt{2}x_2x_3 + 1.319x_1x_3} \leq 1,$$

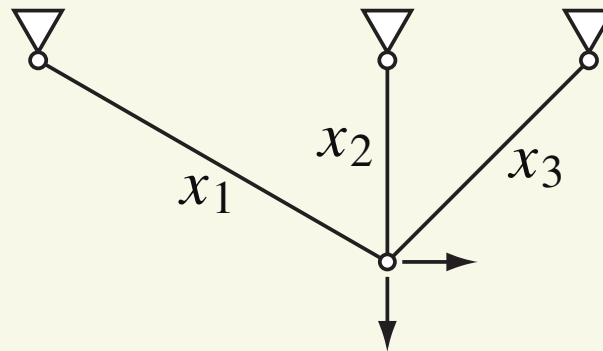
$$x_1, x_2, x_3 \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.2\}.$$

(離散)

- 離散変数 3 つ
- 非線形制約 3 つ

例題) 3 部材トラス構造の最適設計

- 部材の断面をカタログから選択 [Rao '96]
 - $x_1, x_2, x_3 \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.2\}$
 - トラス構造の重量の最小化
 - 応力の上限值制約

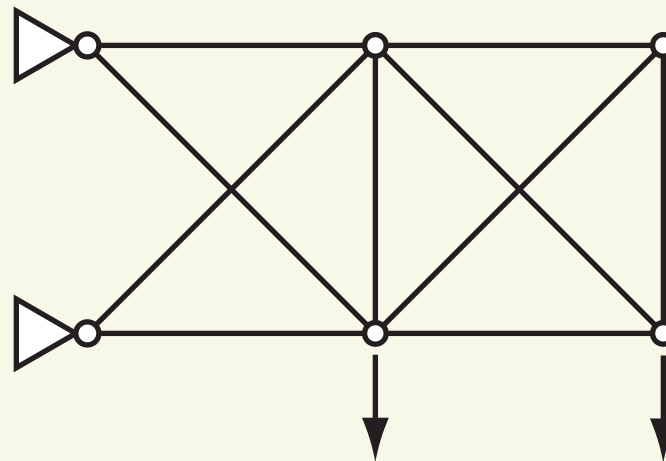


- 提案手法で 大域解 $\mathbf{x}^* = (1.2, 0.5, 0.1)$ が得られた.

#trial	#conv.	#best	#iter.	time	final ρ
100	36	36	4.0	0.1 s	10^2

例題) 10 部材トラス構造の最適設計

- 部材の断面をカタログから (10 個の離散変数) [Cai & Thierauf, '93]
 - 構造の重量の最小化 応力と変位の制約
 - Case D1:
 $x_i \in \{1.62, 1.80, 1.99, 2.13, \dots, 33.50\}$ (42 個の候補)
 - Case D2:
 $x_i \in \{0.100, 0.347, 0.440, 0.539, \dots, 33.700\}$ (30 個の候補)



- 双線形な項を含む等式制約
- 物理量は連続変数

例題) 10 部材トラス構造の最適設計

- 部材の断面をカタログから (10 個の離散変数) [Cai & Thierauf, '93]
- 提案手法で得られた解 :
 - Case D1 : $obj = 5490.74$ [文献中で最良]
 - Case D2 : $obj = 5113.47$ [文献中で 2 番目]

case	#trial	#conv.	#best	#iter.	time	final ρ
D1	100	80	4	18.6	1.4 s	10^3
D2	100	59	8	12.1	0.9 s	10^2

- 文献中の解 :
 - Case D1 : $obj = 5490.74$ [Groenwold, Stander, & Snyman, '99]
 - Case D2 : $obj = 5100.32$ [Thierauf & Cai, '98]
- CPLEX ver. 12.7.1 は 1 時間では 終了しなかった.
 - CPLEX による最良解 = 「文献中の解」

例題) 圧力器の最適設計

- 2つの離散変数と2つの連続変数 [Sandgren '90]

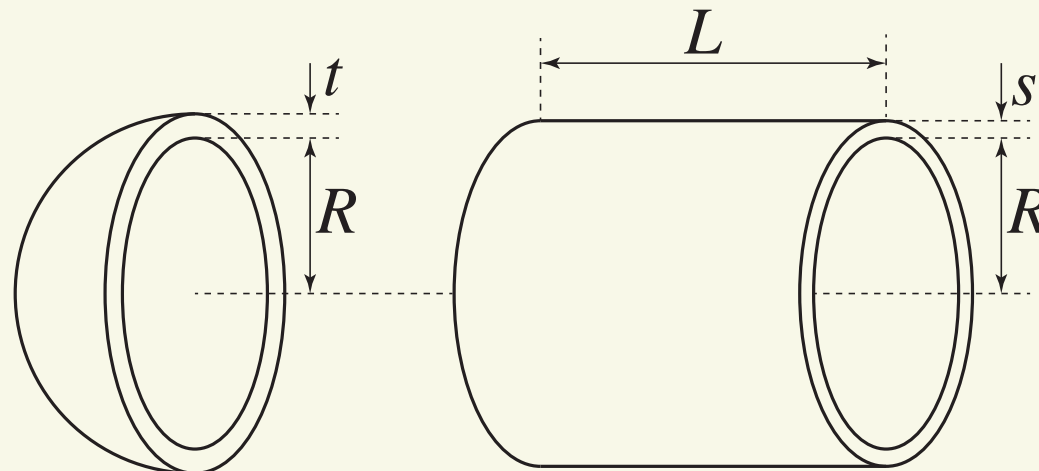
$$\text{Min. } 0.6224x_1x_3x_4 + 1.7781x_2x_3^2 + 3.1661x_1^2x_4 + 19.84x_1^2x_3 \quad (\text{非凸})$$

$$\text{s. t. } \pi x_3^2 x_4 + \frac{4}{3}\pi x_3^3 \geq 1296000 \quad (\text{非凸})$$

$$x_1 \geq 0.0193x_3, \quad x_2 \geq 0.00954x_3$$

$$10 \leq x_3 \leq 200, \quad 10 \leq x_4 \leq 200$$

$$x_1, x_2 \in \{1 \times 0.0625, 2 \times 0.0625, \dots, 99 \times 0.0625\} \quad (\text{離散})$$



例題) 圧力器の最適設計

- 提案手法で得られた解 : $obj = 6059.71$

#trial	#conv.	#best	#iter.	time	final ρ
100	100	100	10.3	0.4 s	$10^3, 10^4$

- メタ解法の文献の解

	<i>obj</i>
[Kitayama, Arakawa, & Yamazaki '06]	6029.87
[He, Prempain, & Wu, '04]	6059.71
[Hsu, Sun, & Leu, '95]	7021.67
[Kannan & Kramer, '94]	7198.20
[Qian, Yu, & Zhou, '93]	7238.83
[Sandgren, '90]	8129.80

- → 文献中の **2 番目に良い解** が得られた.

まとめ

- 混合整数非線形計画に対する発見的解法
 - ADMM（交互方向乗数法）
 - ランダムな初期解からの多スタート
- 提案した ADMM
 - 収束や最適性の保証はない.
 - 簡単で，計算コストも大きくない.
 - 各反復は，非線形計画と射影（丸め）
 - 質の良い解が得られることが多い.