混合整数計画を用いたテンセグリティ構造の最適設計法

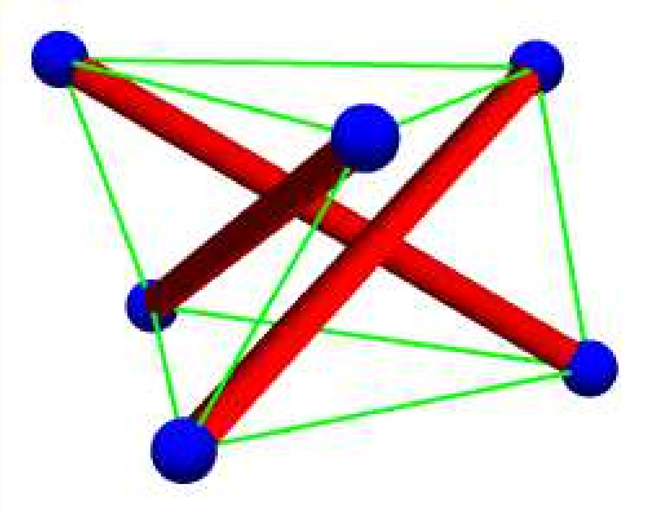
寒野 善博

September 12, 2012

2012 年度 日本建築学会大会

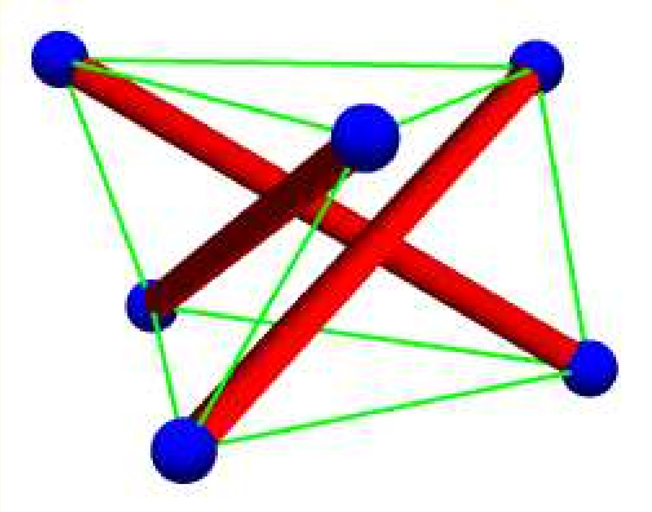
テンセグリティ の 定義

- tension + integrity
  [Emmerich 64] [Fuller 62] [Snelson 65]
- ピン節点構造
  - ストラット：圧縮力
  - ケーブル：引張力
- 自己釣合条件 — 初期張力
- ストラットの不連続性
  - 各節点にストラットは 高々 一本
- prestress stability — 特に 古典的な例
  - 初期張力なしでは 不安定
  - 初期張力ありでは 安定



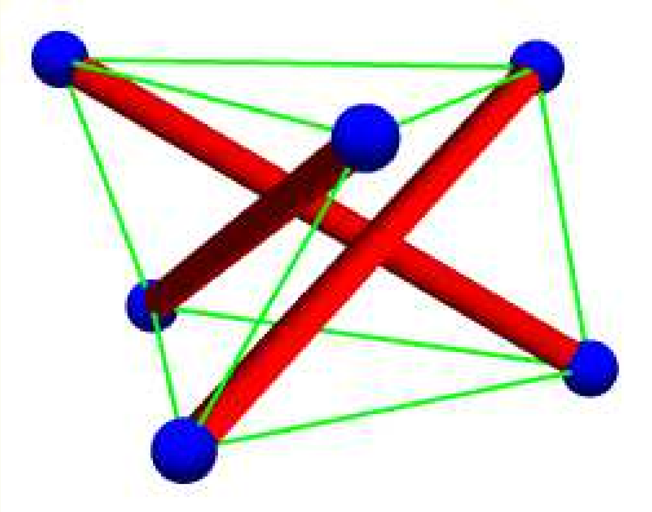
テンセグリティ の 定義

- tension + integrity
  [Emmerich 64] [Fuller 62] [Snelson 65]
- ピン節点構造
  - ストラット：圧縮力
  - ケーブル：引張力
- 自己釣合条件 — 初期張力
- ストラットの不連続性
  - 各節点にストラットは 高々 一本
- prestress stability — 特に 古典的な例
  - 初期張力なしでは 不安定
  - 初期張力ありでは 安定



テンセグリティ の 定義

- tension + integrity
  [Emmerich 64] [Fuller 62] [Snelson 65]
- ピン節点構造
  - ストラット：圧縮力
  - ケーブル：引張力
- 自己釣合条件 — 初期張力
- ストラットの不連続性
  - 各節点にストラットは 高々 一本
- prestress stability — 特に 古典的な例
  - 初期張力なしでは 不安定
  - 初期張力ありでは 安定



新しいテンセグリティを生成するには...

- テンセグリティのトポロジー
  - 部材の接続関係
  - 部材のラベル：ストラット ／ ケーブル

新しいテンセグリティを生成するには...

- テンセグリティのトポロジー
  - 部材の接続関係
  - 部材のラベル：ストラット ／ ケーブル
- 「トポロジーを与えて → 節点座標を求める」方法
  - 群論的対称性

    [Connelly & Terrell 95] [Connelly & Back 98]
  - 既知のテンセグリティを変形

    [Zhang, Maurin & Motro 06] [Tran & Lee 11] [Micheletti & Williams 07]
  - 非線形最適化

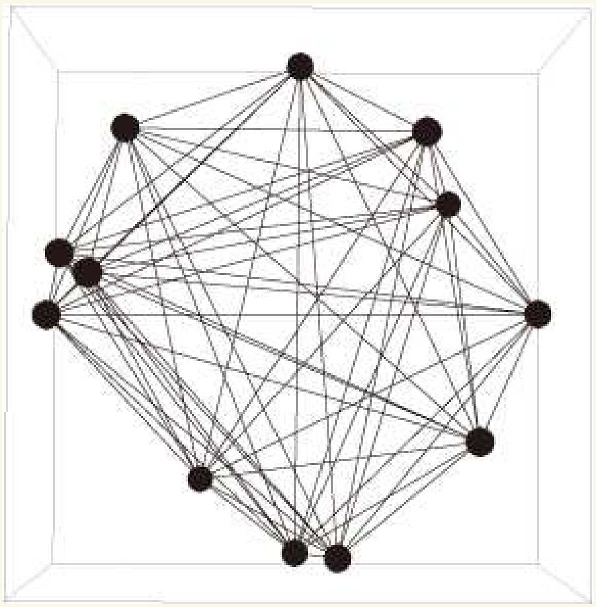
    [Zhang, Ohsaki & Kanno 06] [Masic, Skelton & Gill 06]
- 「節点座標を与えて → トポロジーを求める」方法 ← **(提案手法)**

  他に [Rieffel, Valero-Cuevasa & Lipson 06] [Xu & Luo 10] (GA)

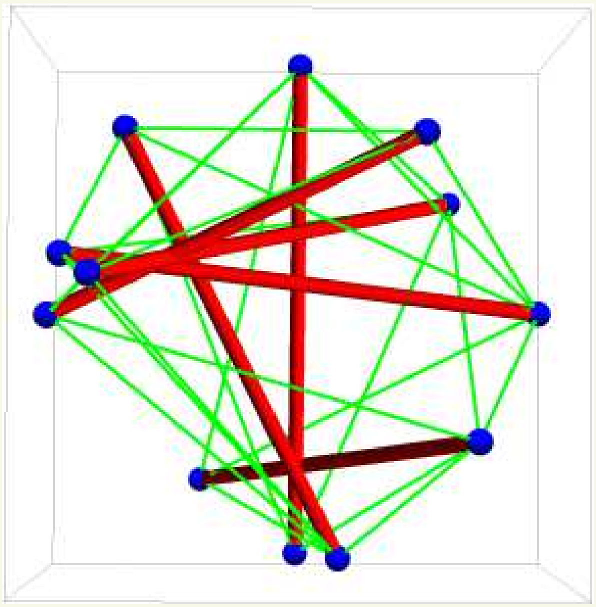
  [Li, Feng, Cao & Gao 10] (Monte Carlo 法)

混合整数計画による設計法

- グランドストラクチャ法



$\longrightarrow$



- たくさんの 部材候補 を用意 $\to$ 最適化で 部材のラベル を決定
  - テンセグリティの定義 を厳密に満たす
- テンセグリティのトポロジーは未知でよい
  $\Rightarrow$ さまざまな形状が「自動的に」生成できる

混合整数計画 による 設計法

- 部材のラベル

$$
\begin{aligned}
(x_i, y_i) = (1,0) \quad &\Leftrightarrow \quad i \in S \text{ (ストラット)} \\
(x_i, y_i) = (0,1) \quad &\Leftrightarrow \quad i \in C \text{ (ケーブル)} \\
(x_i, y_i) = (0,0) \quad &\Leftrightarrow \quad i \in N \text{ (なし)}
\end{aligned}
$$

- さまざまな制約 を考慮できる
  - 応力の上下限値
  - 外力・自重に対する剛性（コンプライアンス）
  - 部材数，部材の長さの総和
  - ストラットの長さの種類
- 整数計画問題は大域的に解ける
  - 分枝限定法 など

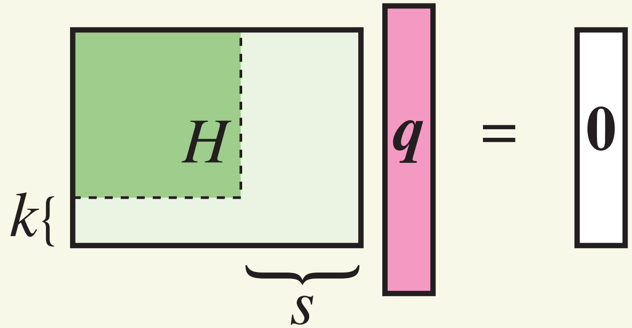
prestress stability

- 外力と内力の釣合式

$$H\boldsymbol{q} = \mathbf{0} \qquad \text{(自己釣合)}$$

  - H : 釣合行列,　　$\boldsymbol{q}$: 軸力ベクトル

- 不静定次数 : $s =$ (部材数) $- \operatorname{rank} H$
- 不安定次数 : $k =$ (変位の自由度) $- \operatorname{rank} H^{\mathrm{T}} - 6$



- Maxwell の法則

$$\begin{aligned}&(\text{不安定次数 } k) - (\text{不静定次数 } s) \\ &\quad = 3(\text{節点数}) - (\text{ストラット数}) - (\text{ケーブル数}) - 6\end{aligned}$$

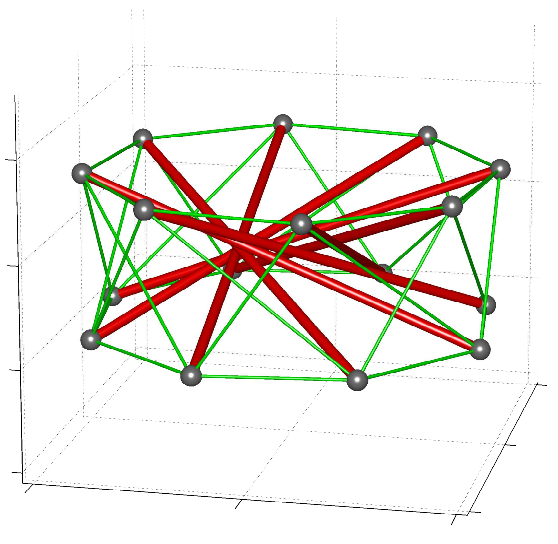
最適化問題の例

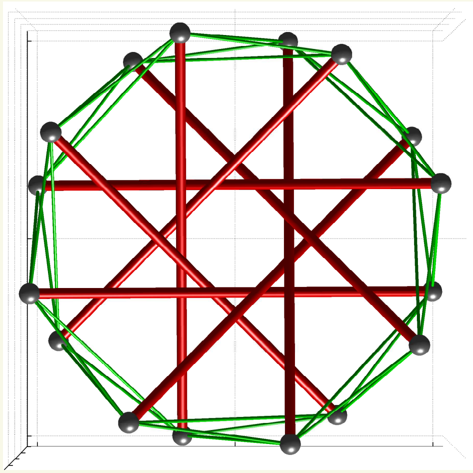
$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{min} & \text{ケーブルの長さの総和} & \\
\mathrm{s.t.} & \text{初期張力に関する制約} & \\
 & \quad\text{(自己釣合条件)} & \\
 & \quad\text{(上下限制約)} & \\
 & \text{ストラットの不連続性} & \\
 & \text{ストラット数とケーブル数の関係} & (\diamondsuit) \\
 & \text{ストラットの長さの種類の制約} & (\spadesuit) \\
 & \text{交差する部材を除く制約} &
\end{array}
$$

- ($\diamondsuit$): Maxwell の法則を用いる.
- ($\spadesuit$): 解の対称性を（間接的に）調節できる.
- 多くの場合，最適解は prestress stable である.

部材の長さの種類 と 対称性

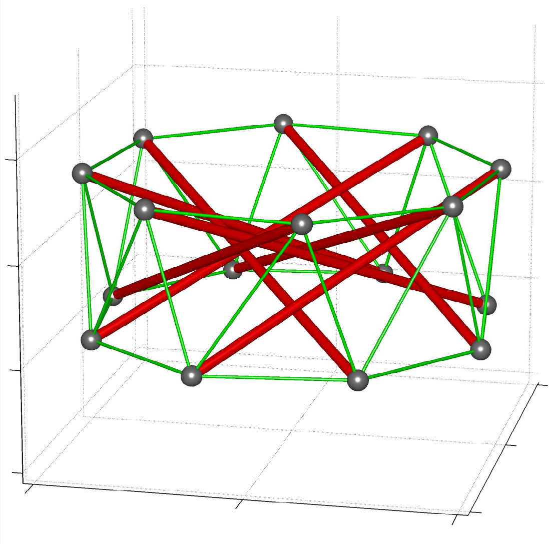
ストラット 1 種類

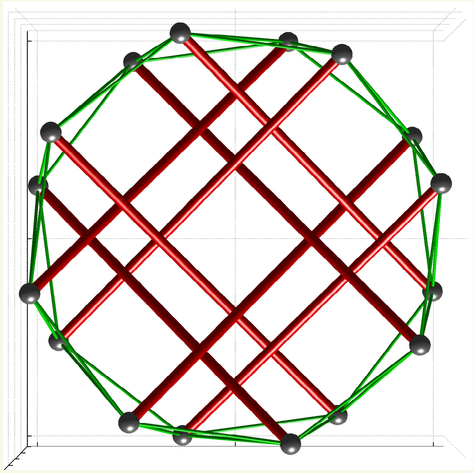




D_8-対称

ストラット 2 種類



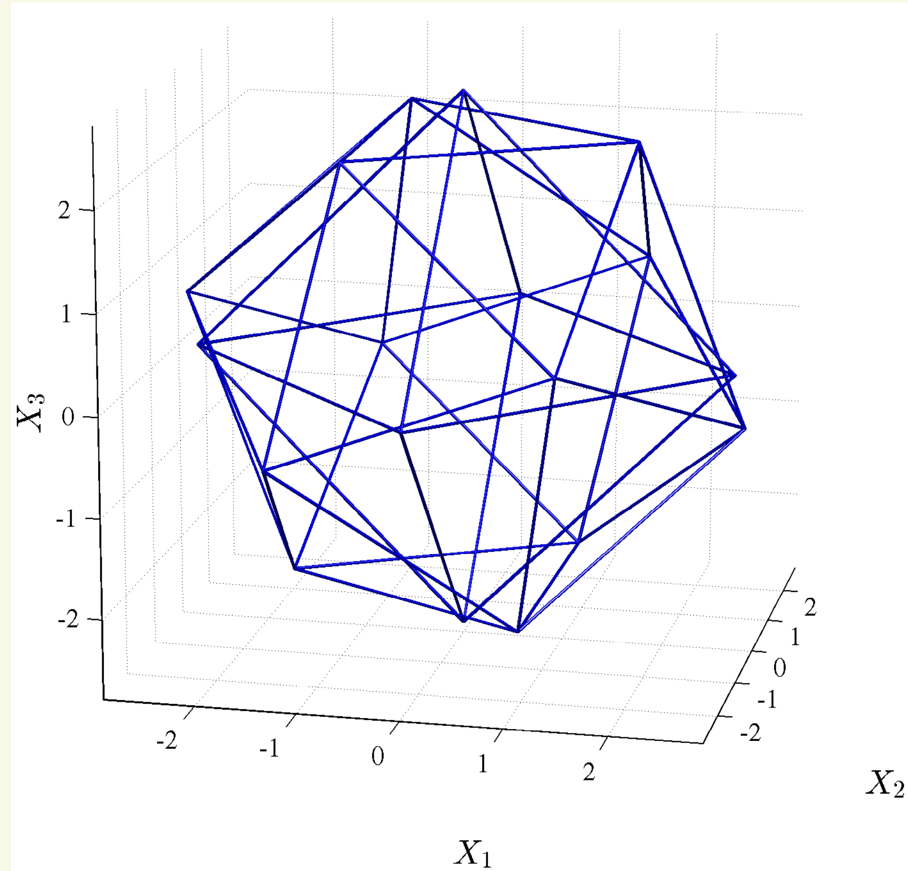


D_4-対称

- 形状の対称性を（間接的に）変化させられる.

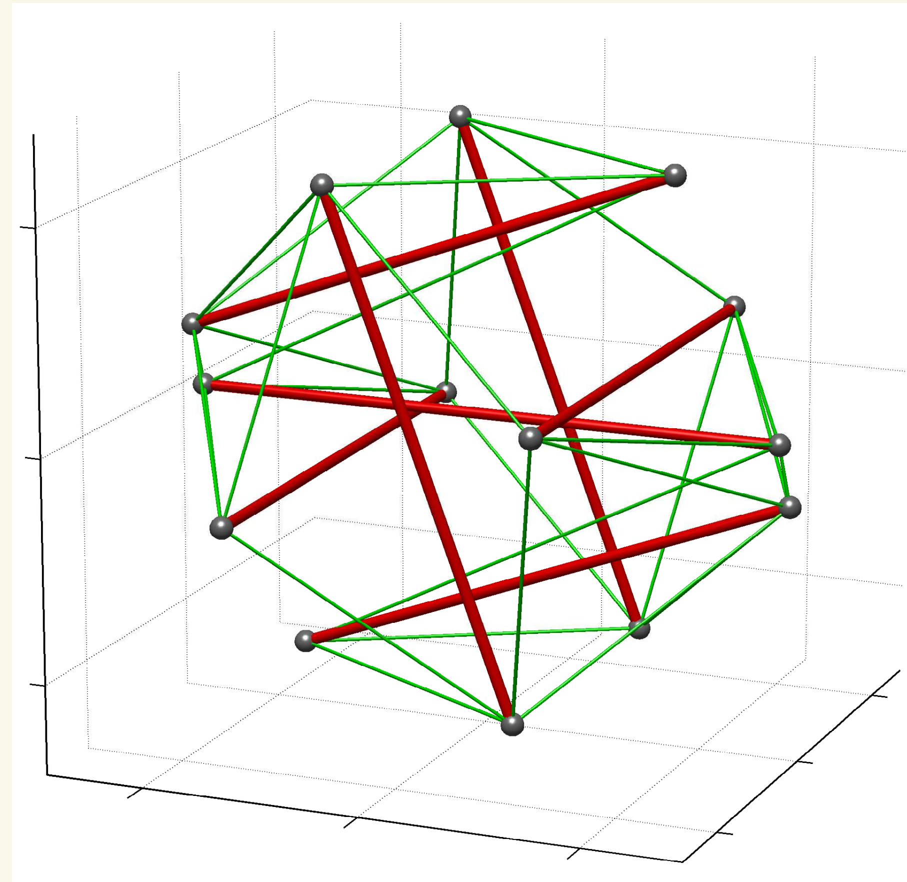
例題）グランドストラクチャ

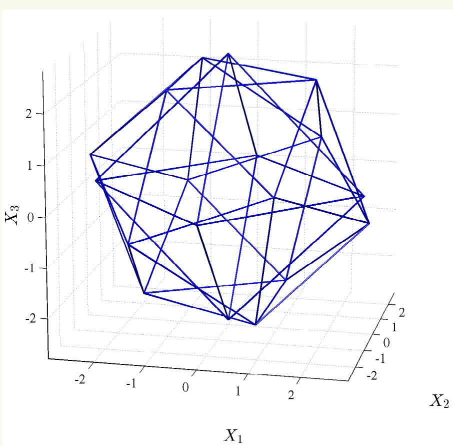
- 18 節点
  - 正 20 面体
  - 正 8 面体
- 153 部材
  （完全グラフ）
- MIP ソルバ
  - CPLEX (ver. 12.2)
  - Gurobi (ver. 4.6)



例題）対称性の高い例

- 7 ストラット
  2 種類
- 28 ケーブル

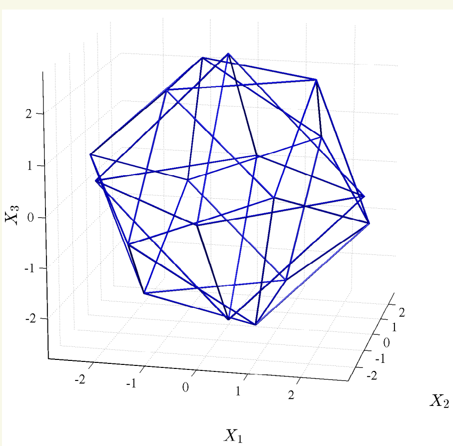


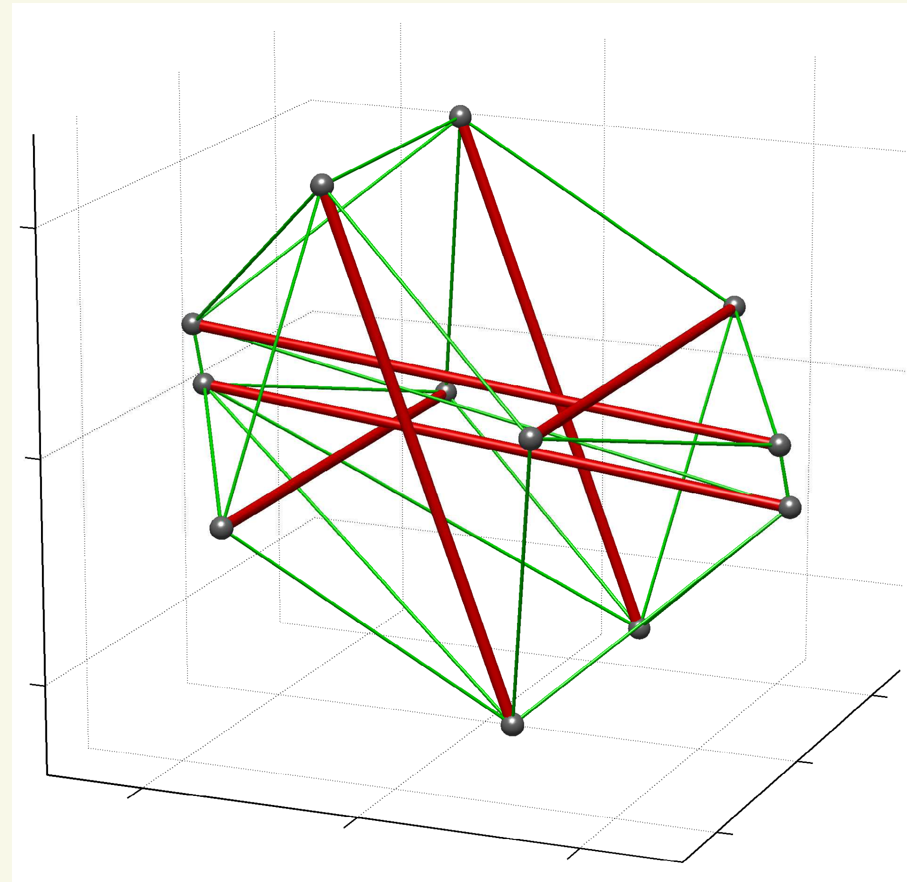


$$\text{不静定次数} = 1$$
$$\text{不安定次数} = 2$$
prestress stable

例題）対称性の高い例

- 6 ストラット
  2 種類
- 22 ケーブル

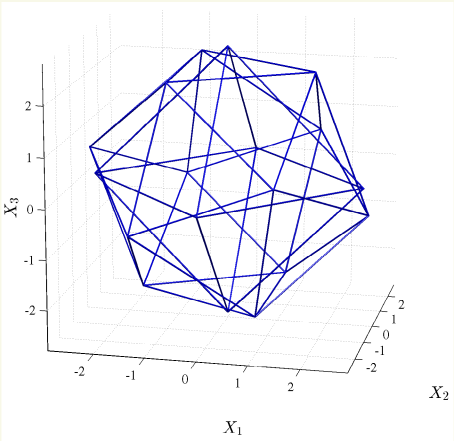


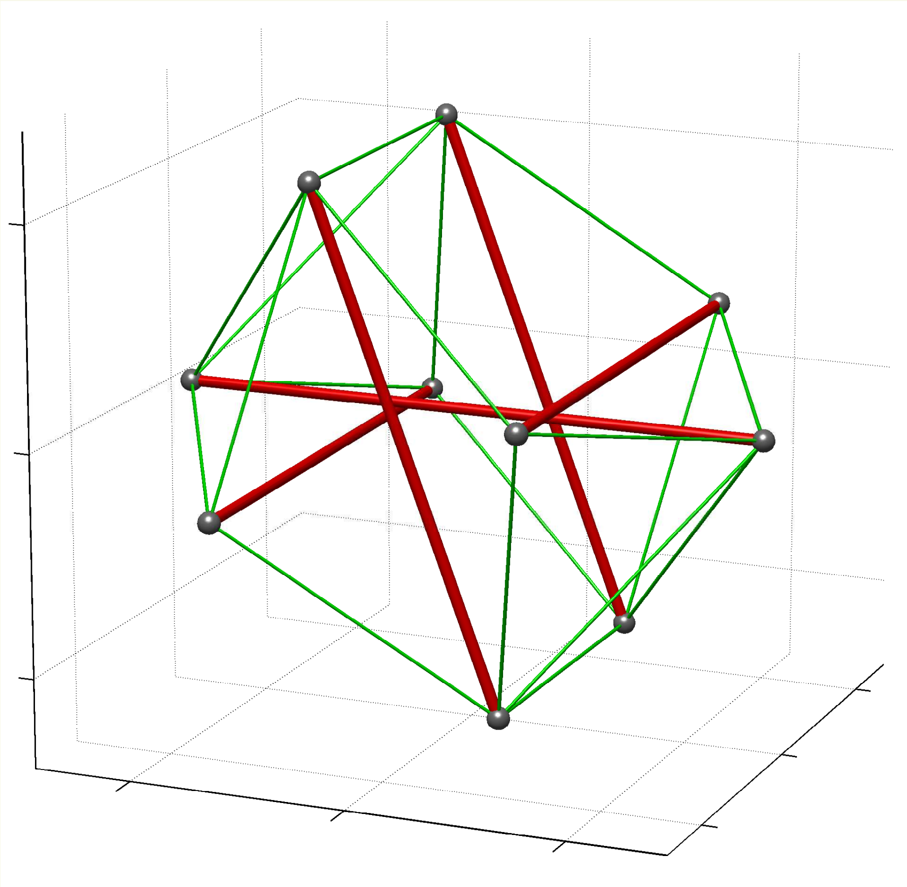


$$\text{不静定次数} = 1$$
$$\text{不安定次数} = 3$$
prestress stable

例題）対称性の高い例

- 5 ストラット
  2 種類
- 18 ケーブル

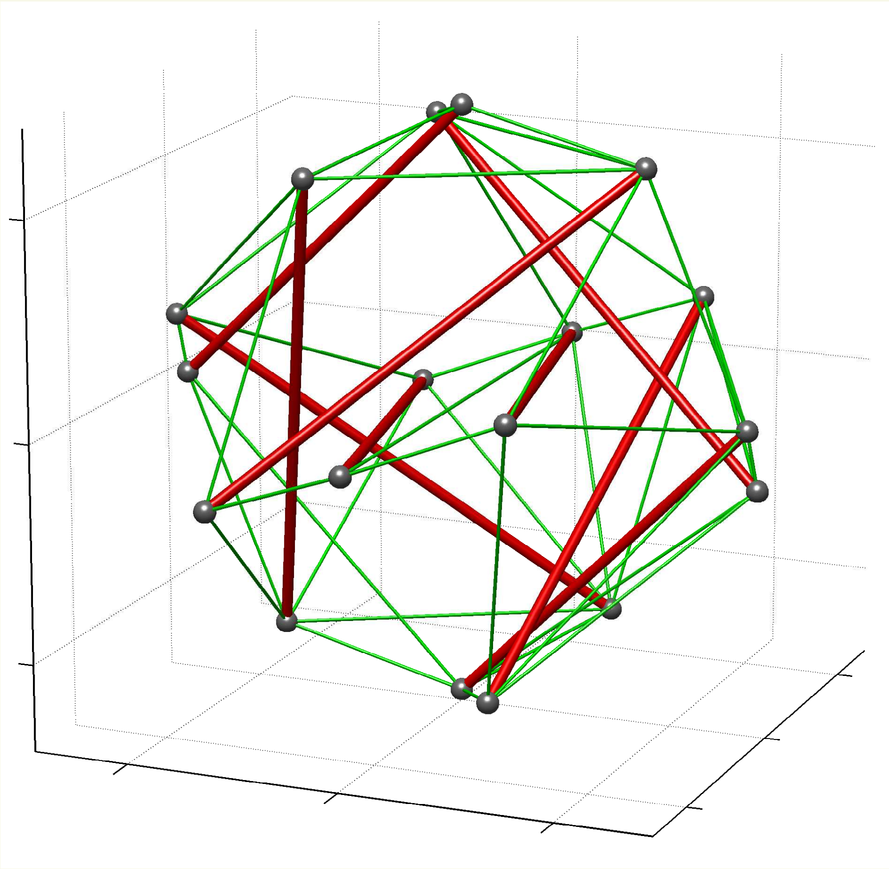


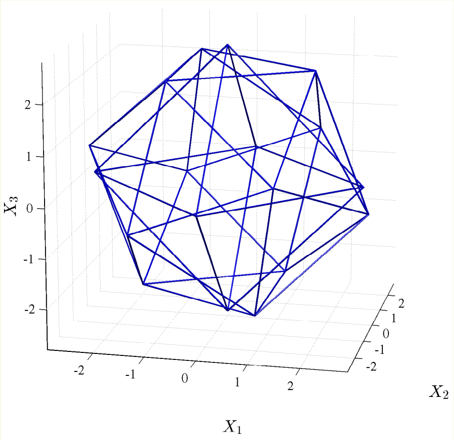


不静定次数 $= 1$
不安定次数 $= 2$
prestress stable

例題）対称性の高い例

- 9 ストラット
  3 種類
- 38 ケーブル

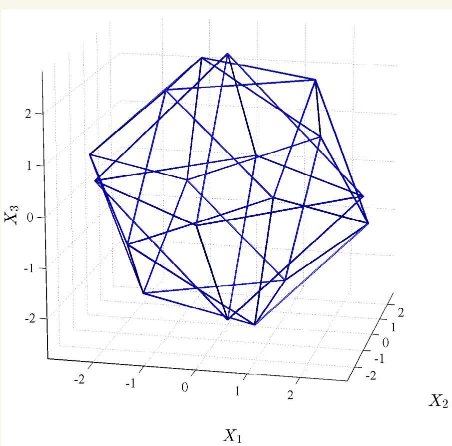


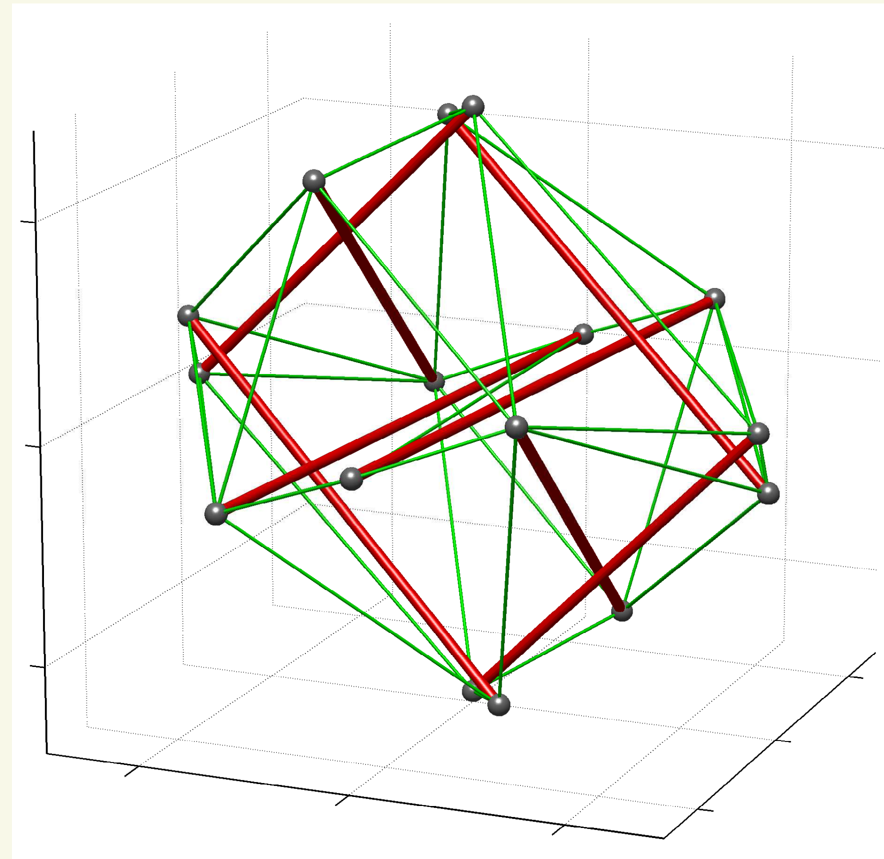


不静定次数 $= 1$
不安定次数 $= 2$
prestress stable

例題）対称性の高い例

- 8 ストラット
  3 種類
- 33 ケーブル

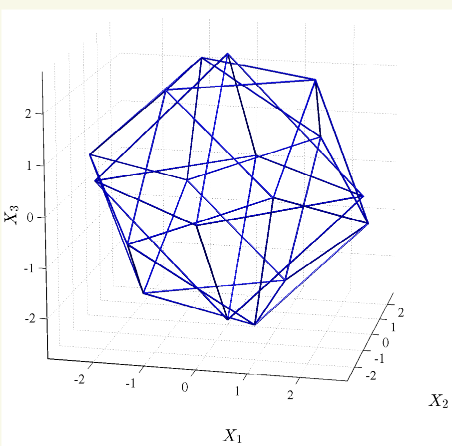


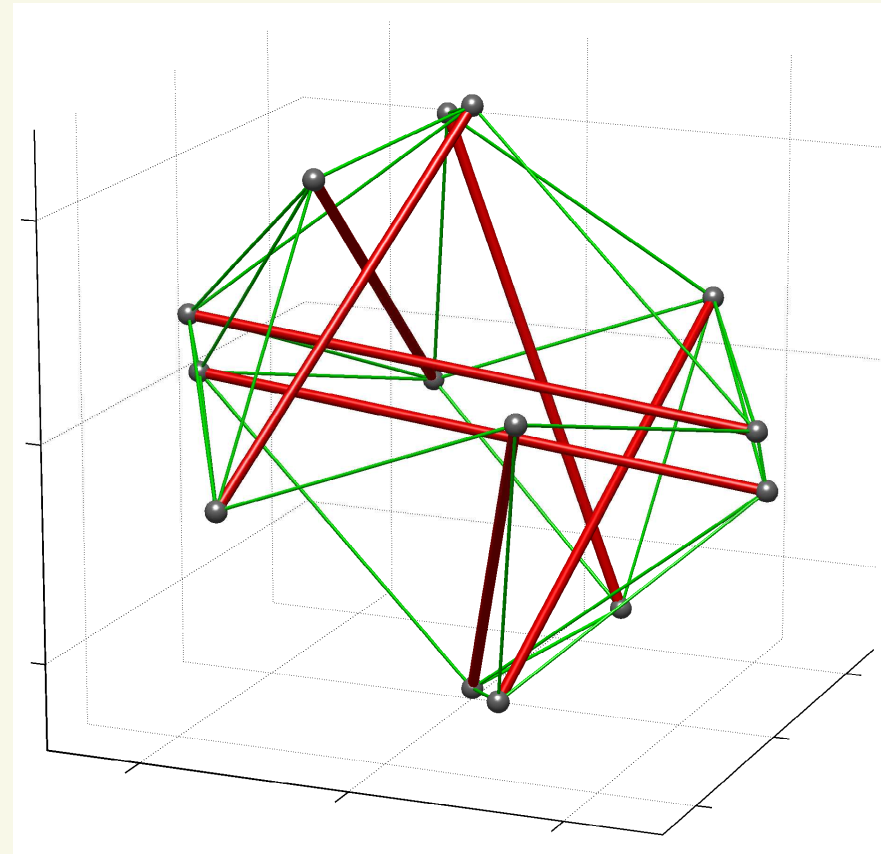


不静定次数 $= 1$
不安定次数 $= 2$
prestress stable

例題）対称性の高い例

- 7 ストラット
  3 種類
- 28 ケーブル



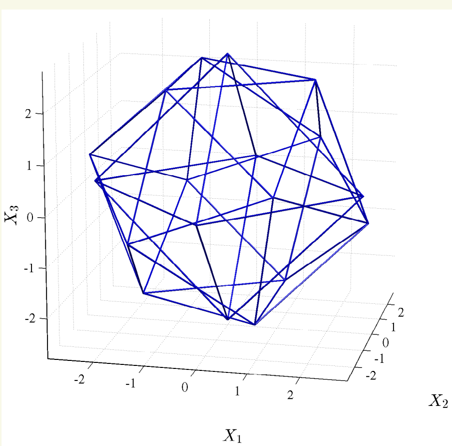


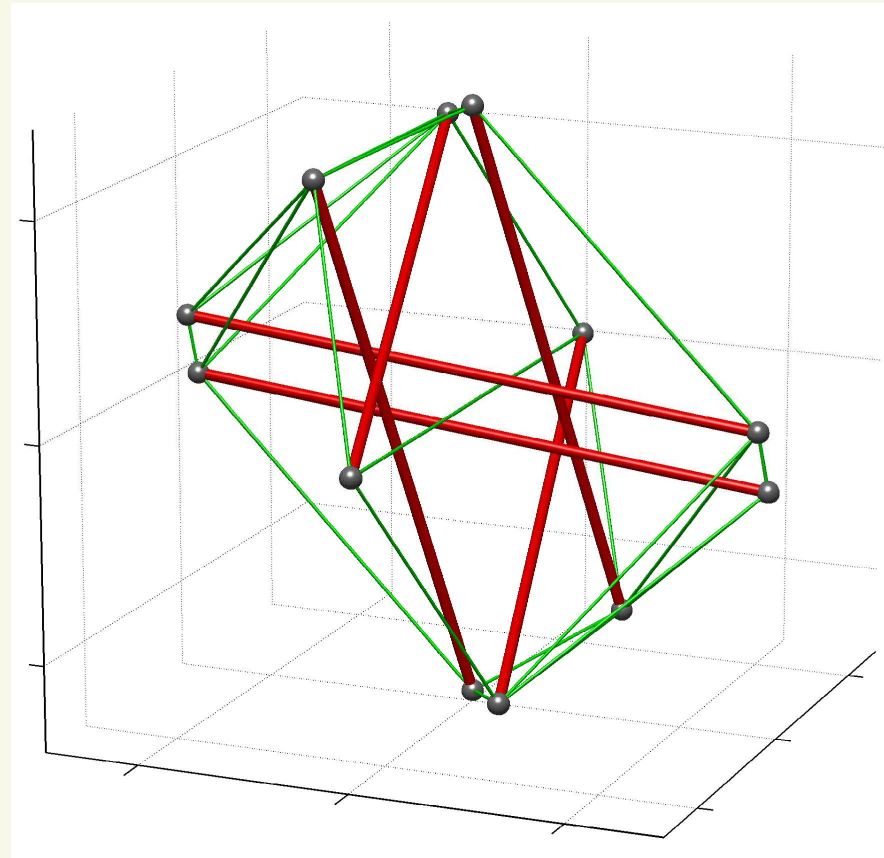
$$\text{不静定次数} = 1$$
$$\text{不安定次数} = 2$$

prestress stable

例題）対称性の高い例

- 6 ストラット
  3 種類
- 23 ケーブル





$$\text{不静定次数} = 1$$
$$\text{不安定次数} = 2$$

prestress stable

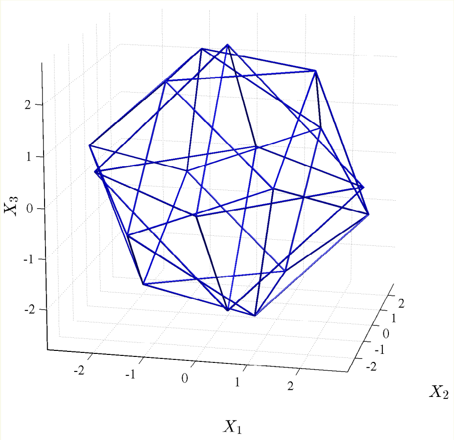
例題）計算時間

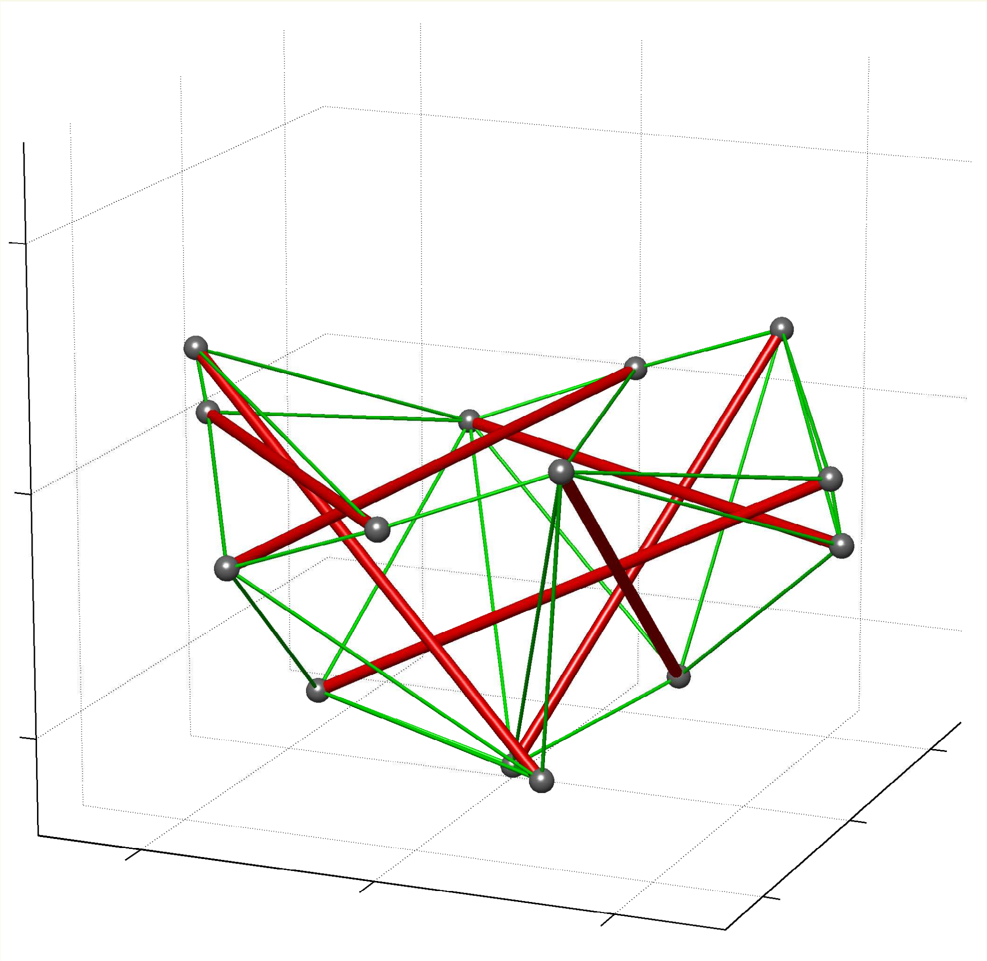
$(\bar{s}, \bar{b})$	CPLEX (s)	Gurobi (s)
$(7, 2)$	398.1	376.8
$(6, 2)$	273.0	470.3
$(5, 2)$	209.3	566.0
$(9, 3)$	49,350.2	3,369.3
$(8, 3)$	6,715.7	2,694.6
$(7, 3)$	1,084.0	1,527.6
$(6, 3)$	1,627.8	1,248.2
$(5, 3)$	1,693.5	570.6

- $\bar{s}$: ストラット数
- $\bar{b}$: ストラットの長さの種類数

例題）非対称な例

- 7 ストラット
  5 種類
- 28 ケーブル

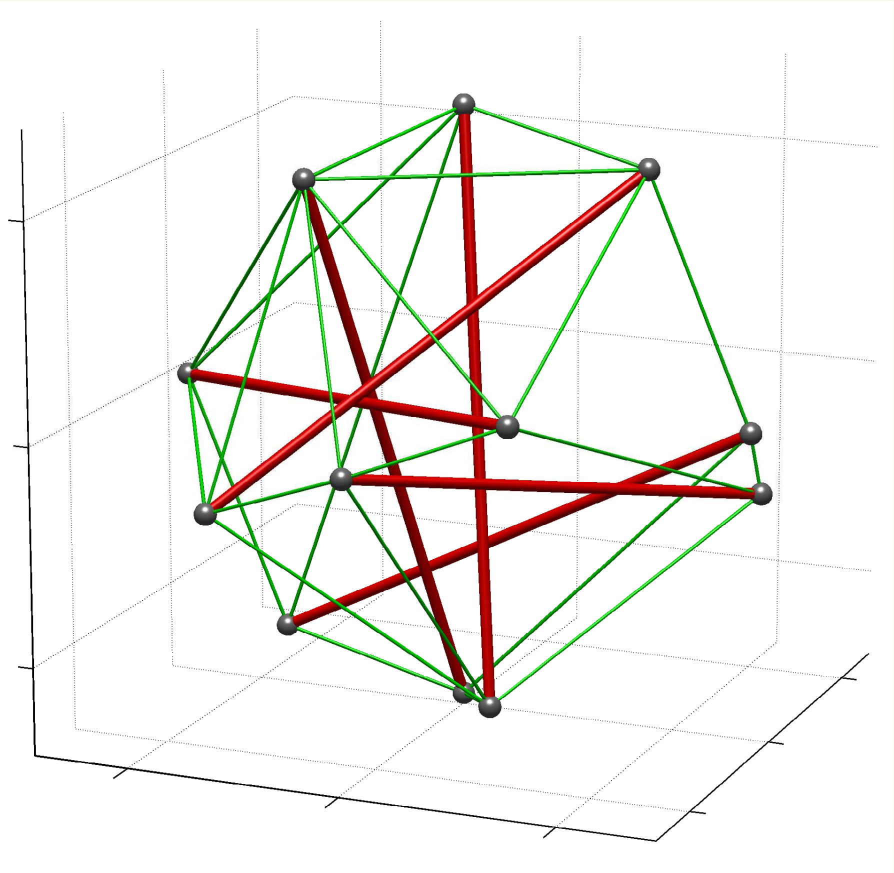


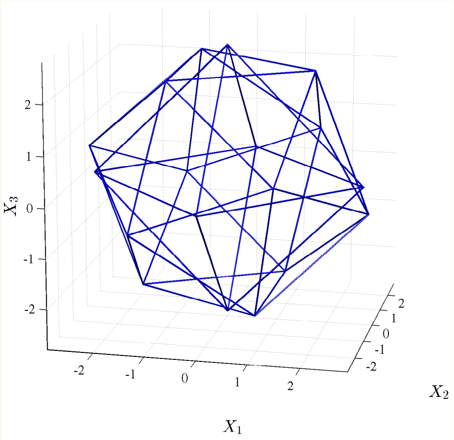


$$\text{不静定次数} = 1$$
$$\text{不安定次数} = 2$$
prestress stable

例題）非対称な例

- 6 ストラット
  5 種類
- 23 ケーブル

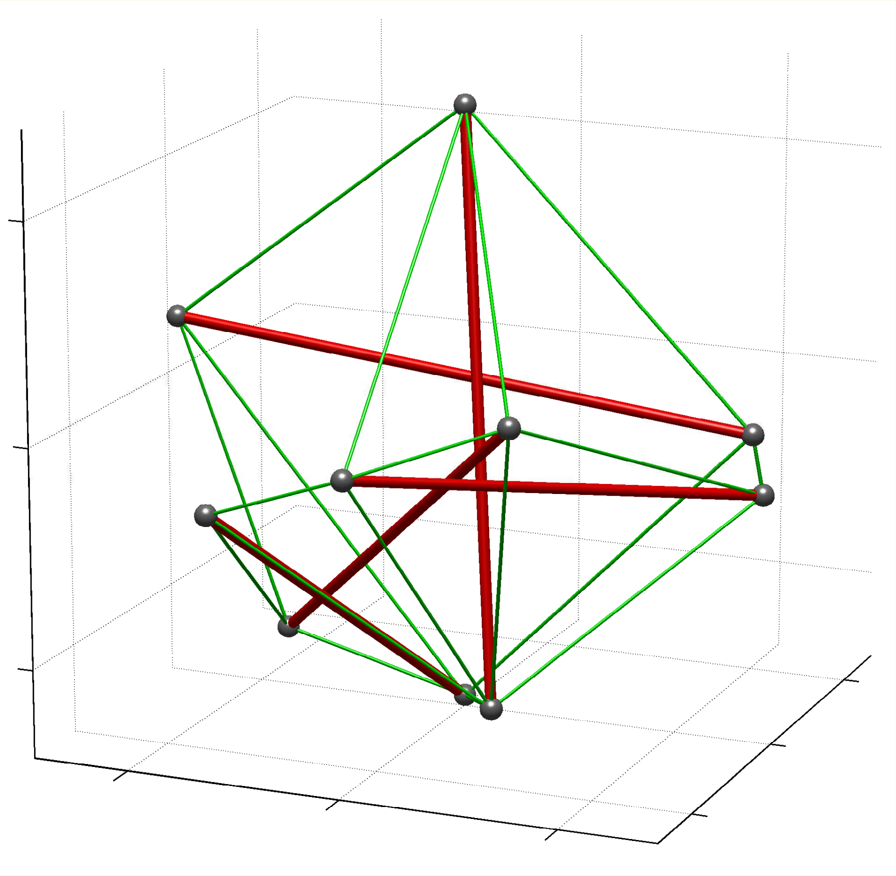


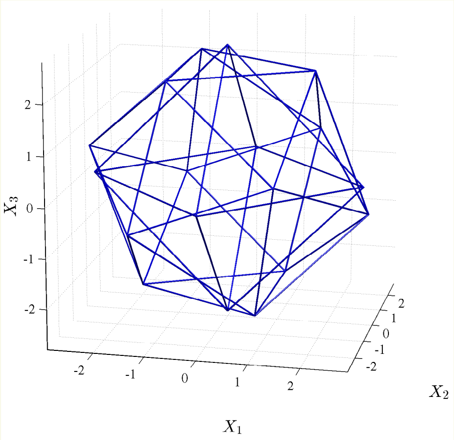


不静定次数 $= 1$
不安定次数 $= 2$
prestress stable

例題）非対称な例

- 5 ストラット
  5 種類
- 18 ケーブル





不静定次数 $= 1$
不安定次数 $= 2$
prestress stable

まとめ

- テンセグリティ
  - 自己釣合条件
  - ストラットの不連続性条件
  - 初期張力　なしで 不安定 ／ ありで 安定
- 混合整数計画による設計法
  - 部材のラベル　$\leftarrow$ 整数変数で表現
    - (S) ストラット，(C) ケーブル，(N) 部材なし
  - 入力としてトポロジーは不要
  - さまざまな形状のテンセグリティを生成可能