構造物のロバスト最適化

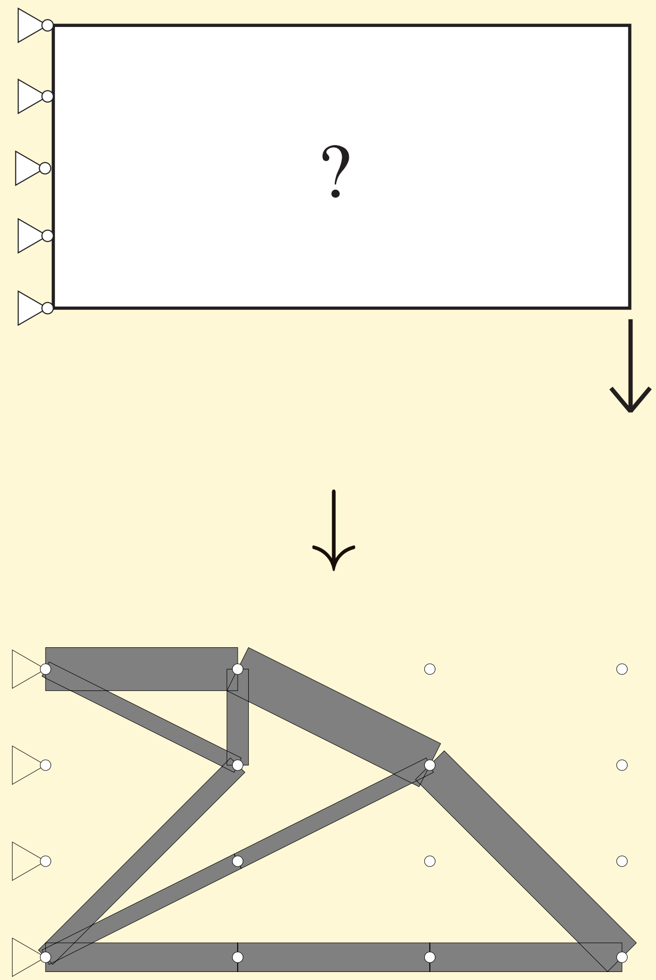
寒野 善博

September 14, 2011

日本オペレーションズ・リサーチ学会 第 66 回シンポジウム

構造物の設計

- 設計とは...

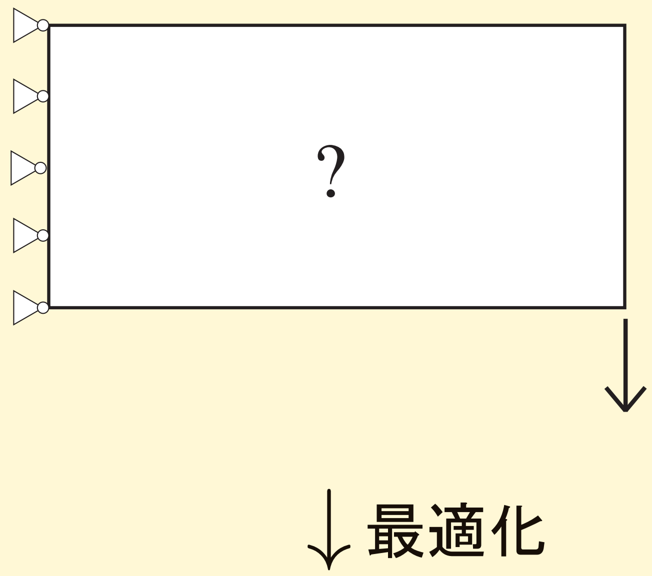


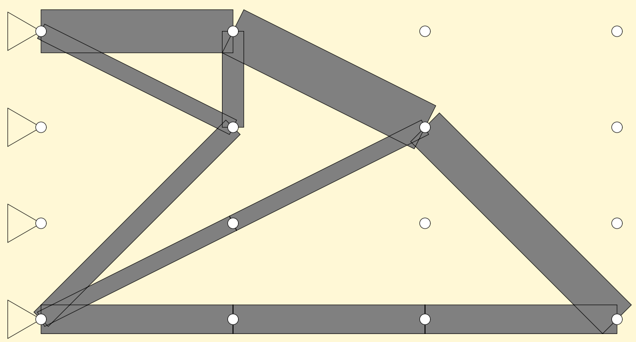
設計解

- 設計条件を満たすかをチェックする

構造物の設計

- 設計とは...



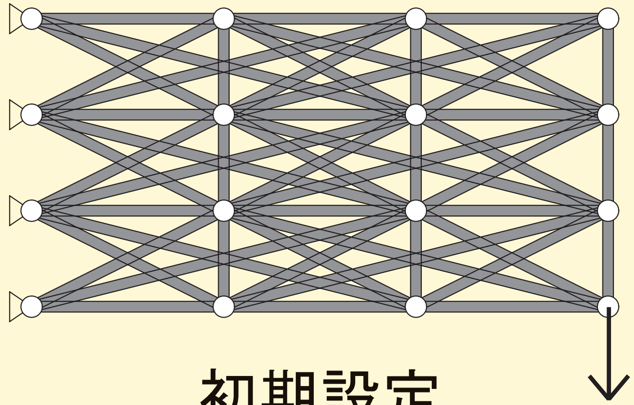


最適設計

- 設計条件は最適化問題の制約とする

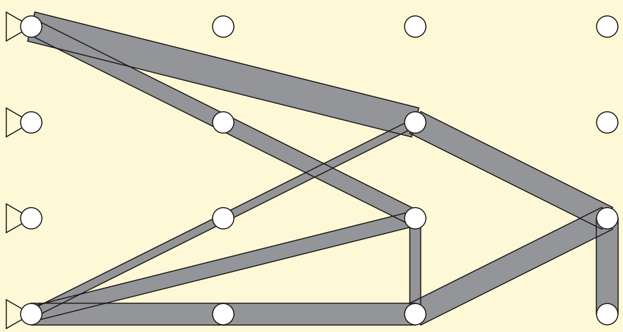
構造物の 最適化 と ロバスト最適化

- たとえば...

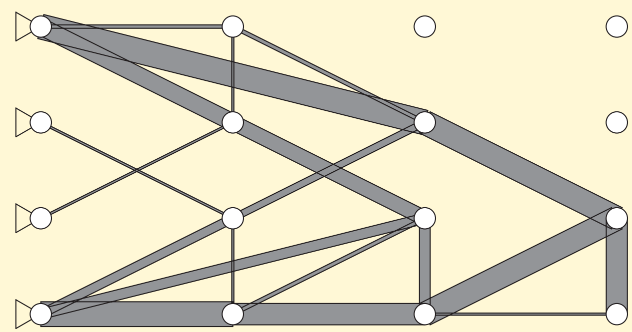


初期設定

↓ 最適化



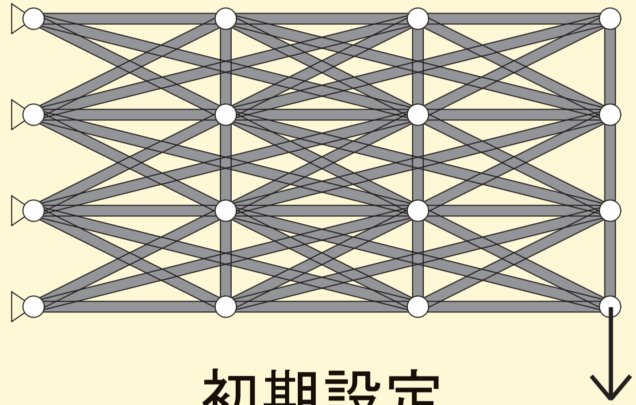
通常の構造最適化



ロバスト構造最適化

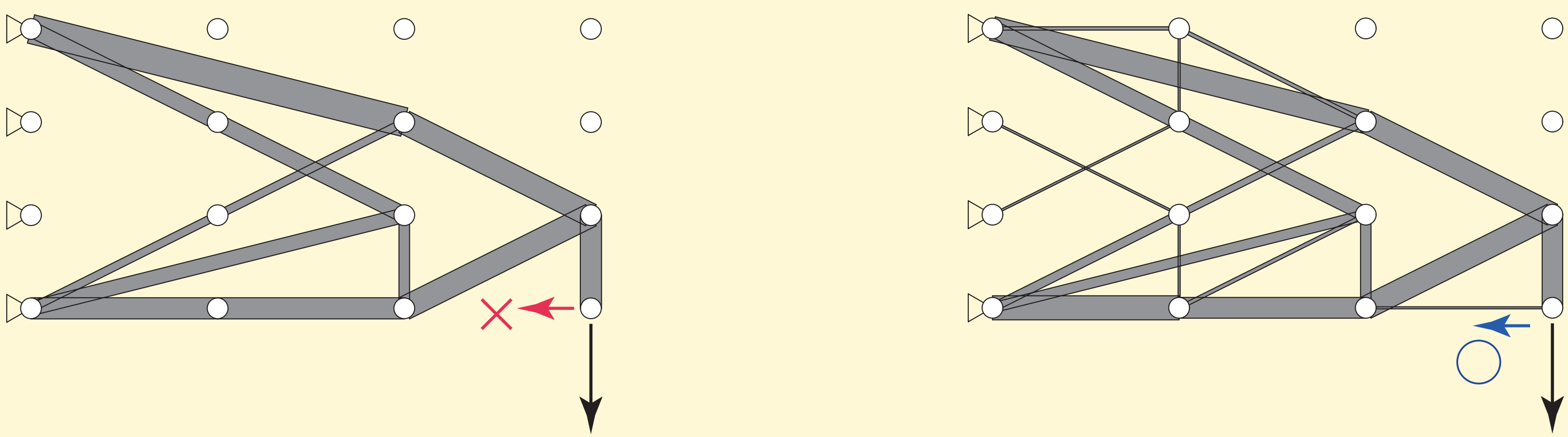
構造物の 最適化 と ロバスト最適化

- たとえば...



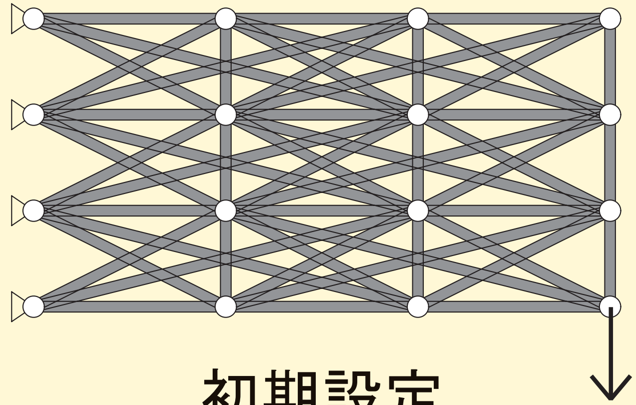
初期設定

↓最適化



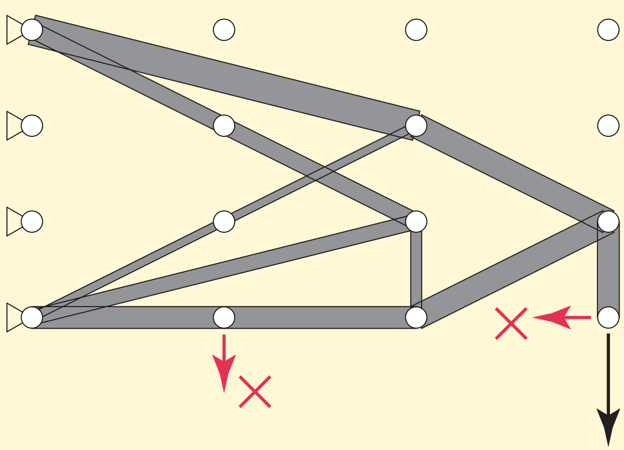
構造物の 最適化 と ロバスト最適化

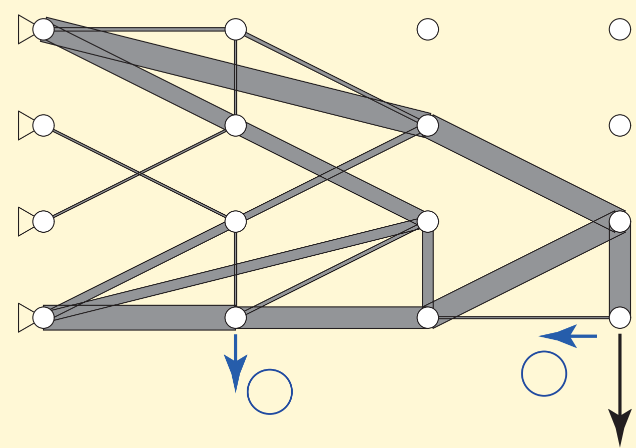
- たとえば...



初期設定

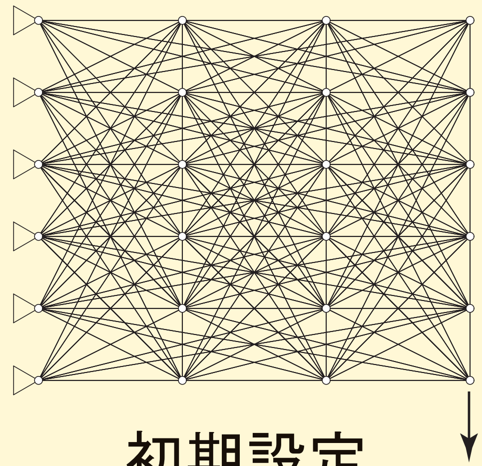
↓最適化



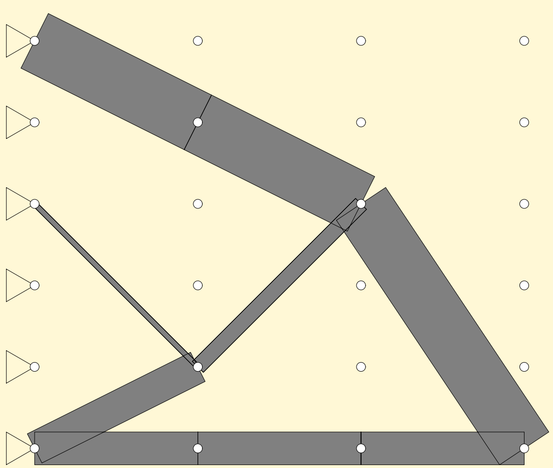


構造物の 最適化 と ロバスト最適化

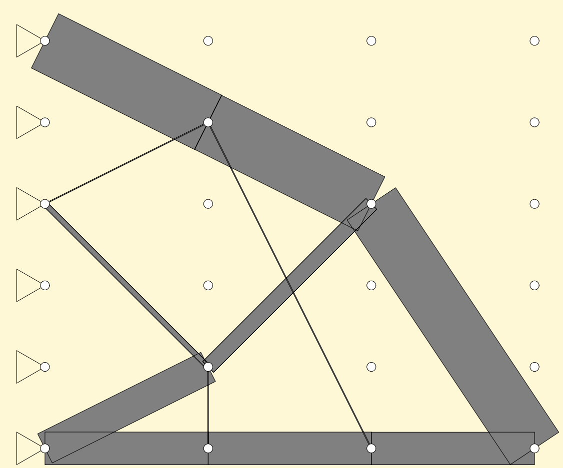
- たとえば...



初期設定



通常の構造最適化



ロバスト構造最適化

ロバスト最適設計

- 通常の構造最適化

$$\min_{\boldsymbol{x}} \{ vol(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z}) \leq \boldsymbol{0} \}$$

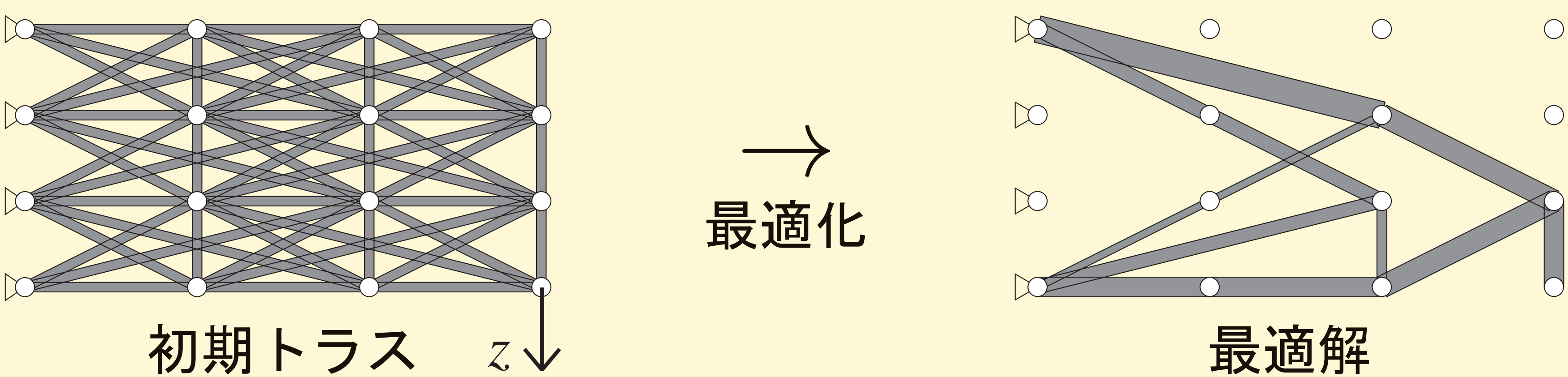
  - たとえば 変数 $\boldsymbol{x}$ は断面積
  - たとえば データ $\boldsymbol{z}$ は外力

ロバスト最適設計

- 通常の構造最適化

$$\min_{\boldsymbol{x}}\{vol(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z}) \leq \mathbf{0}\}$$

  - たとえば 変数 $\boldsymbol{x}$ は断面積
  - たとえば データ $\boldsymbol{z}$ は外力



ロバスト最適設計

- 通常の構造最適化

$$\min_{\boldsymbol{x}}\{vol(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z}) \le \boldsymbol{0}\}$$

  - たとえば 変数 $\boldsymbol{x}$ は断面積
  - たとえば データ $\boldsymbol{z}$ は外力

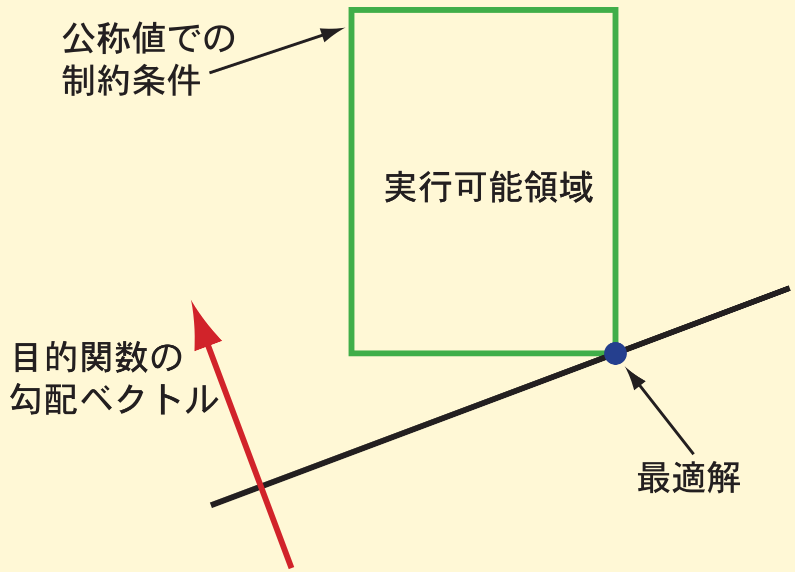
- ロバスト最適化

$$\min_{\boldsymbol{x}}\{vol(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z}) \le \boldsymbol{0}\ (\forall \boldsymbol{z} \in Z)\}$$

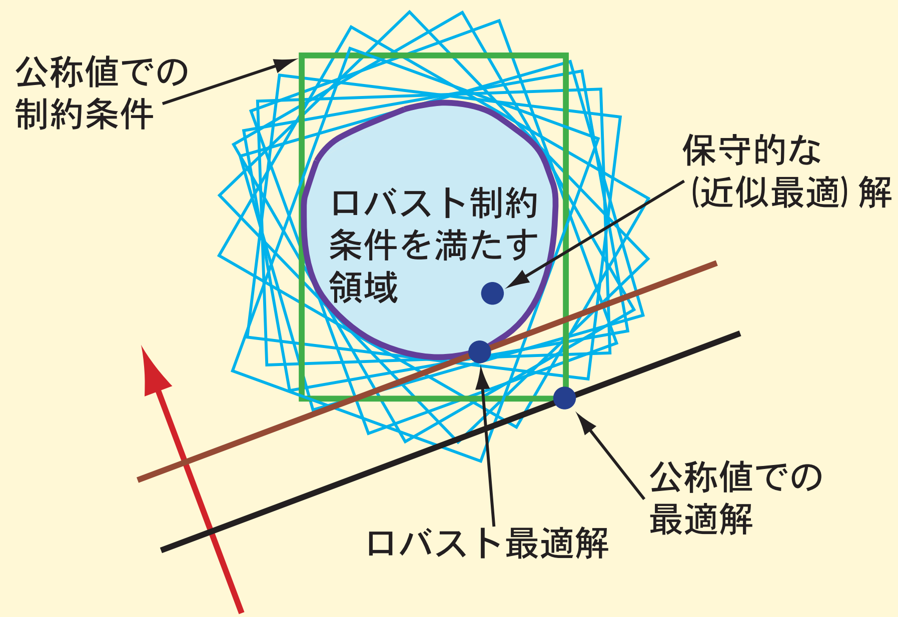
  - たとえば 不確定性集合 Z は $Z = \{\tilde{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{\zeta} \mid \|\boldsymbol{\zeta}\| \le \alpha\}$
  - ロバスト制約を書き直すと $\max\{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z}) \mid \boldsymbol{z} \in Z\} \le \boldsymbol{0}$

ロバスト最適化

- ロバスト最適化の概念



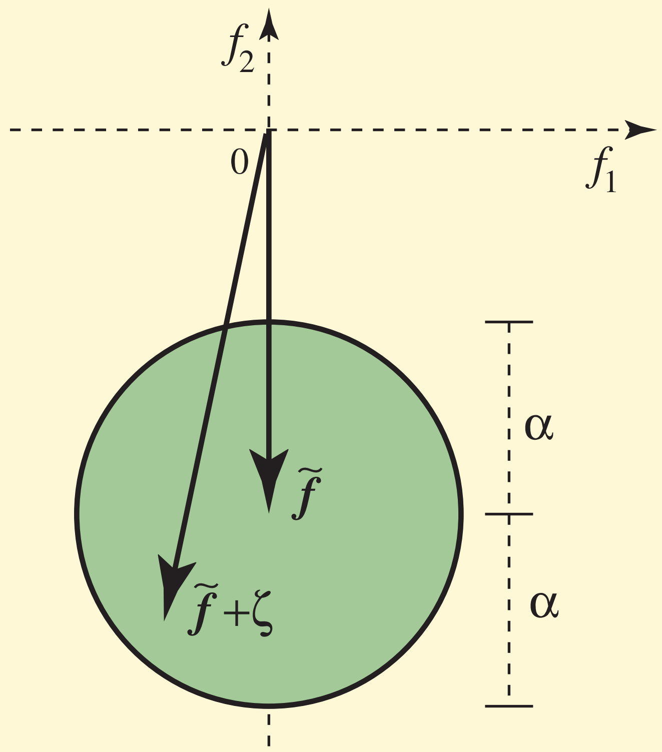
通常の最適化問題

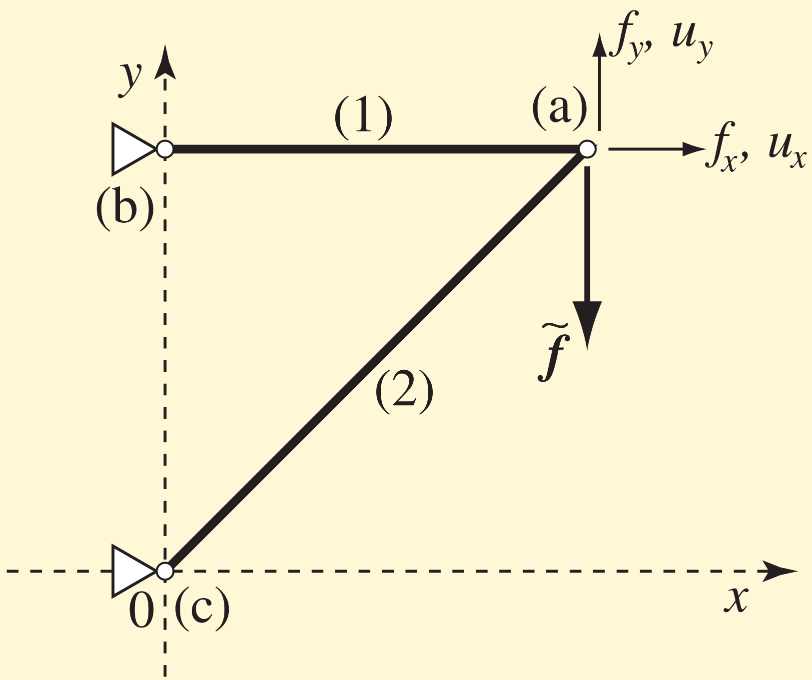


ロバスト最適化問題

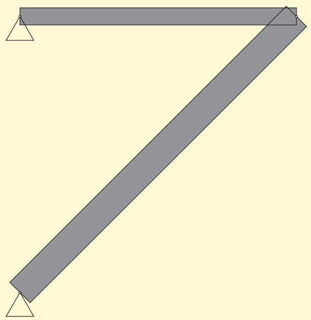
ロバスト最適化の例：2 部材トラス

- 外力：中心が $\tilde{f}$，幅 α 以下 の任意の点をとる
- 応力制約

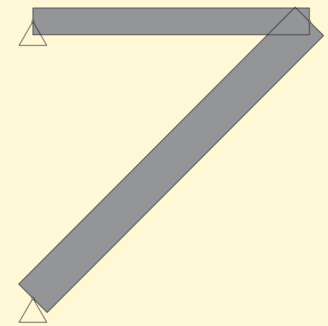




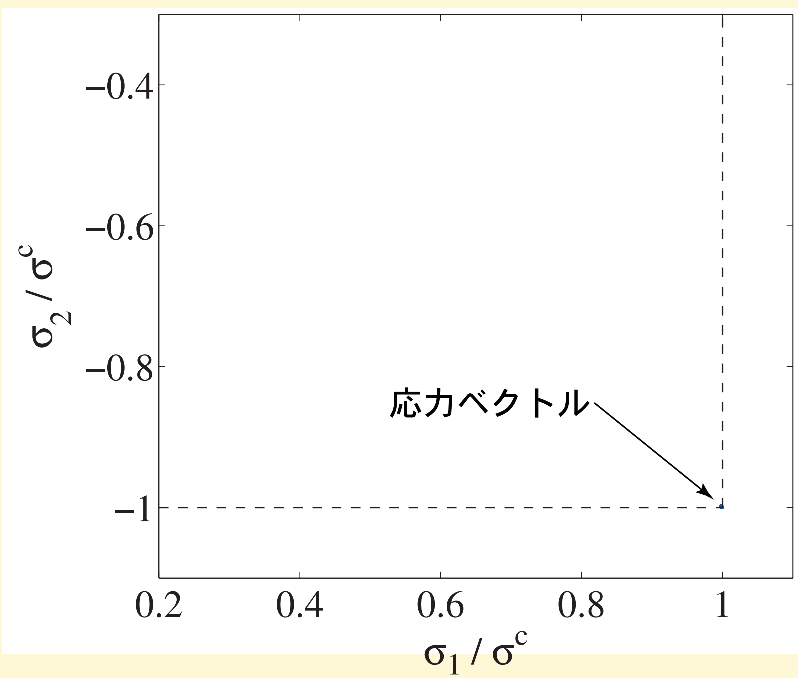
ロバスト最適化の例：2 部材トラス

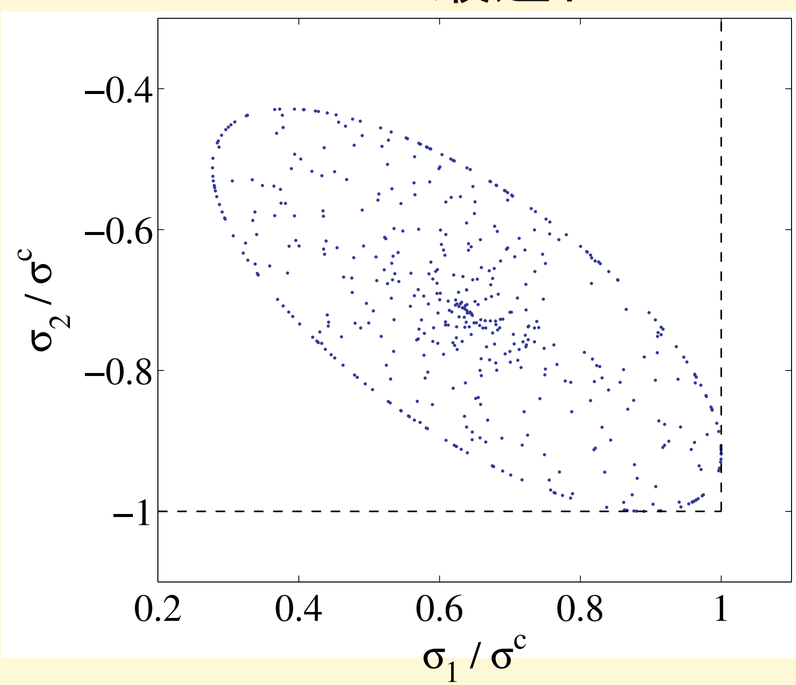


通常の最適化



ロバスト最適化

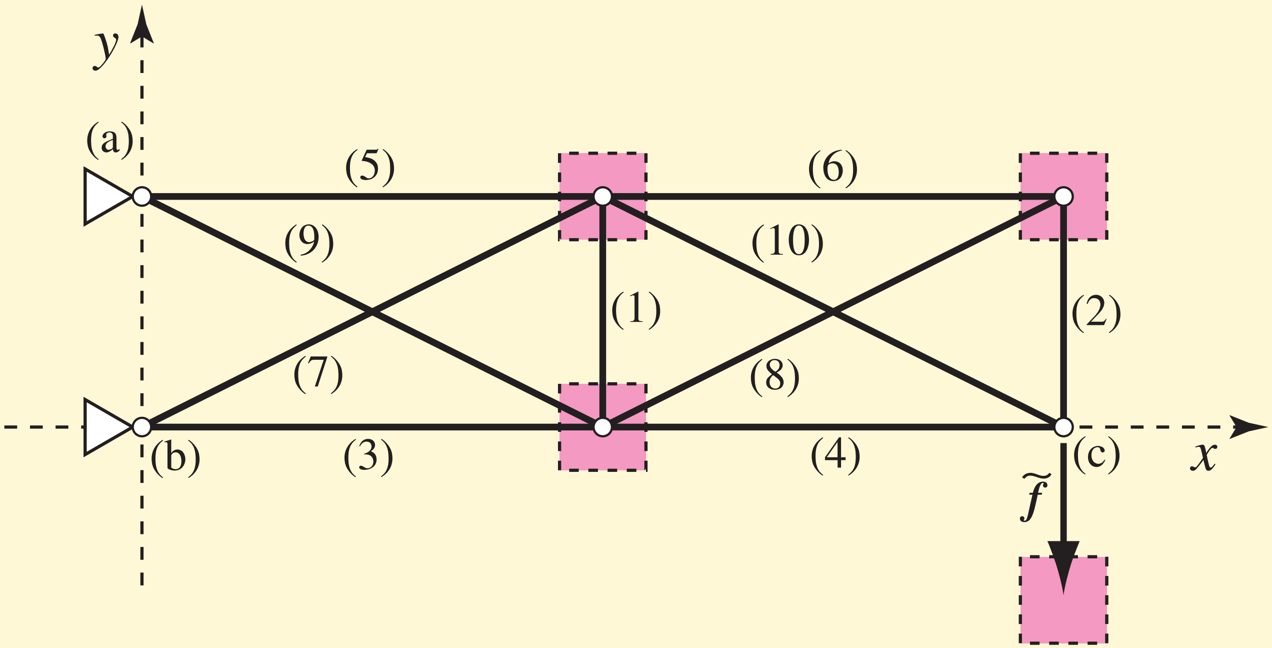




両方の部材の制約が有効

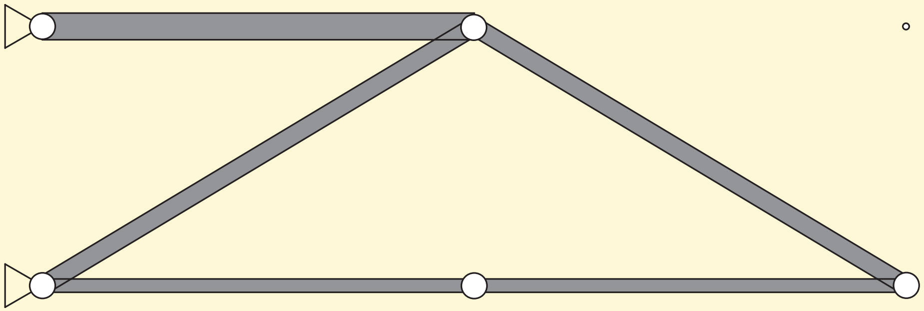
ロバスト最適化の例：10 部材トラス

- 外力
  - 図の □ の範囲の 任意の値をとる
  - すべての節点に存在し得る
- 応力制約

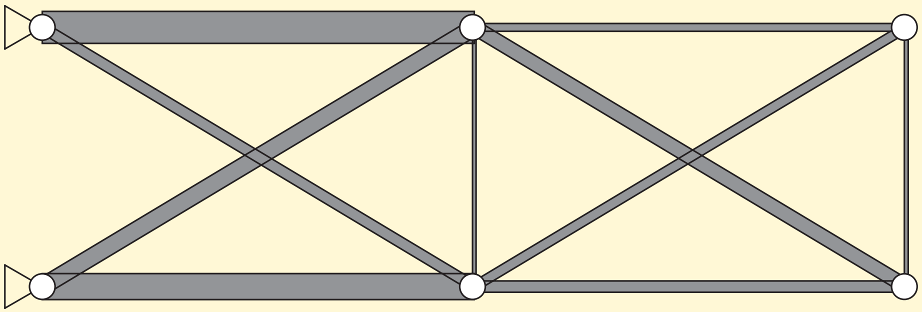


ロバスト最適化の例：10 部材トラス

- 通常の最適化

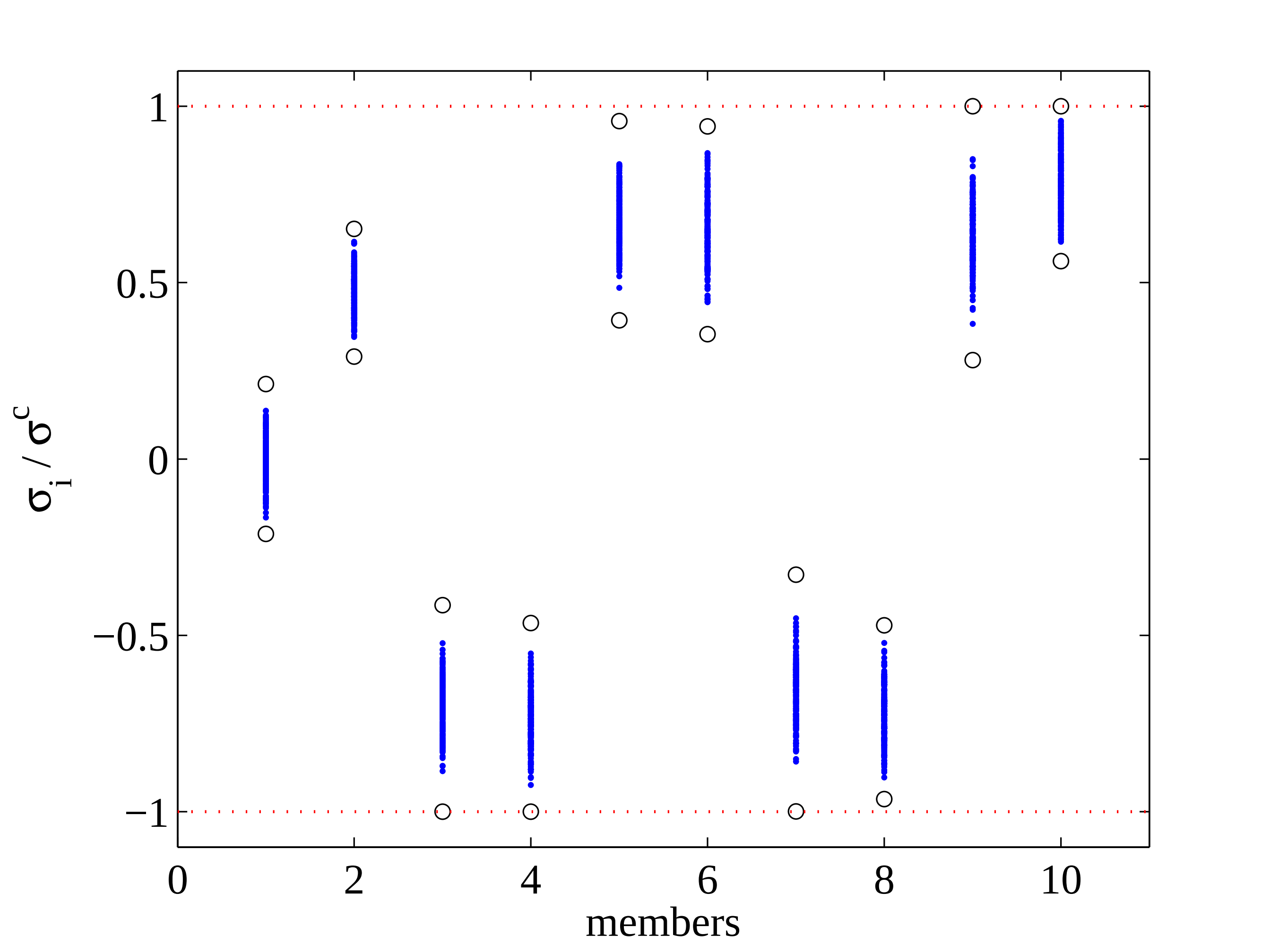


- ロバスト最適化



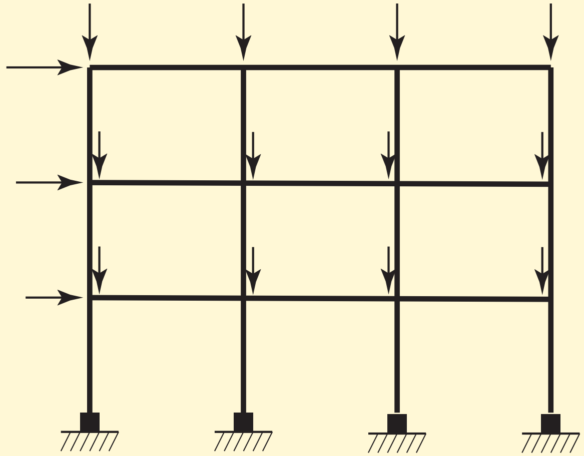
ロバスト最適化の例：10 部材トラス

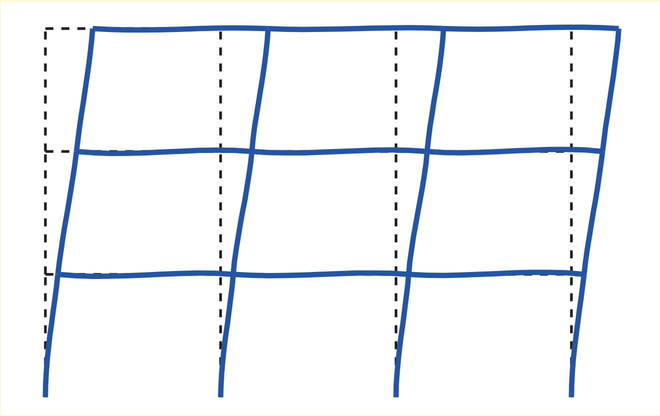
- ロバスト最適解の応力分布



ロバスト性の重要性

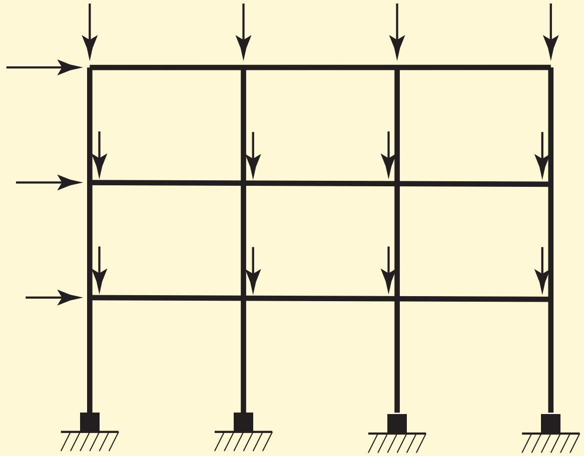
- 構造物の解析
  - 外力 $\boldsymbol{f}$ を与え，変位 $\boldsymbol{u}$ を求める

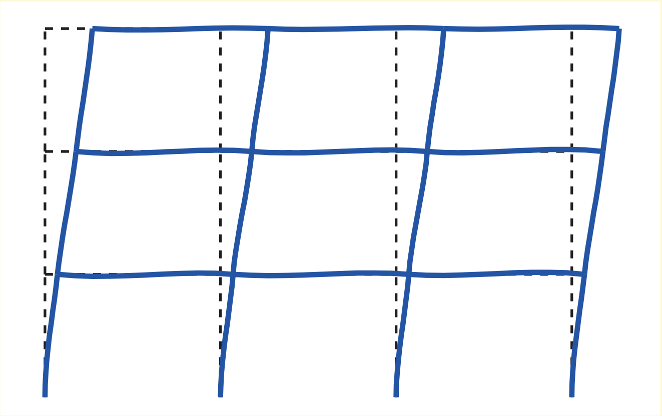




ロバスト性の重要性

- 構造物の解析
  - 外力 $\boldsymbol{f}$ を与え，変位 $\boldsymbol{u}$ を求める





$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \qquad \text{(釣合式)}$$

$\boldsymbol{K}$: 剛性行列　(正定値対称)

剛性, 部材の接続関係, 節点位置　で決まる

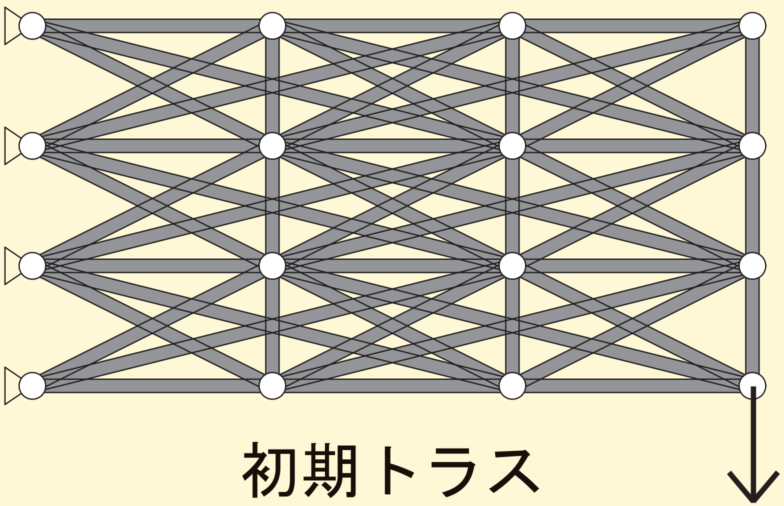
- 設計：適当な $\boldsymbol{f}$ を定めて $\boldsymbol{K}$ を決める

ロバスト性の重要性

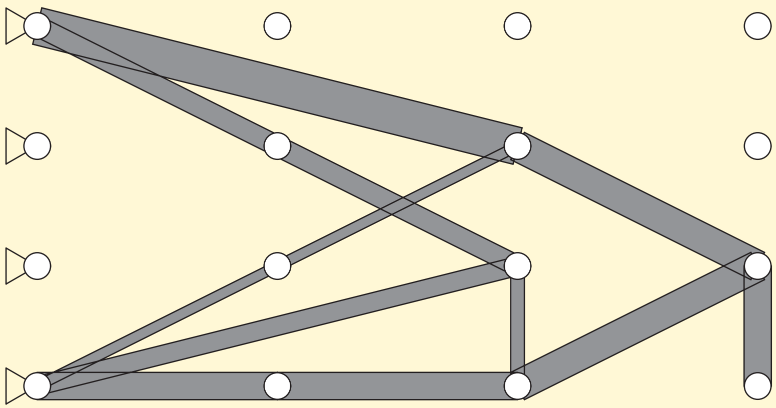
- 不確定性はどこから生じるか
  - 外乱の予測の限界
    - 地震, 雪, 風
  - 施工誤差
    - 材料定数，位置，プレストレス
  - 推定誤差
    - 地盤の力学的パラメータ
    - 耐震補強における既存建物のパラメータ
  - 構造物の部分的な損傷
    - 劣化，疲労，地震や火災を経験

動機：ロバスト最適化

- トラスのコンプライアンス最小化
- 単一荷重では，最適解はしばしば不安定
- → ロバスト最適化が重要



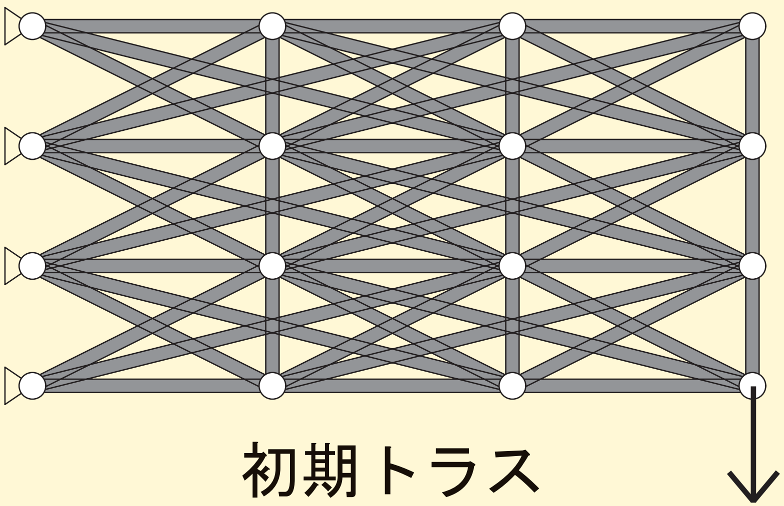
初期トラス

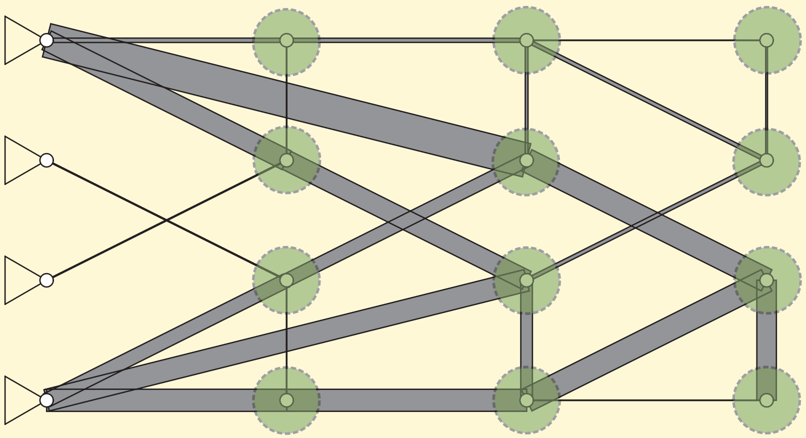


通常の最適解

動機：ロバスト最適化

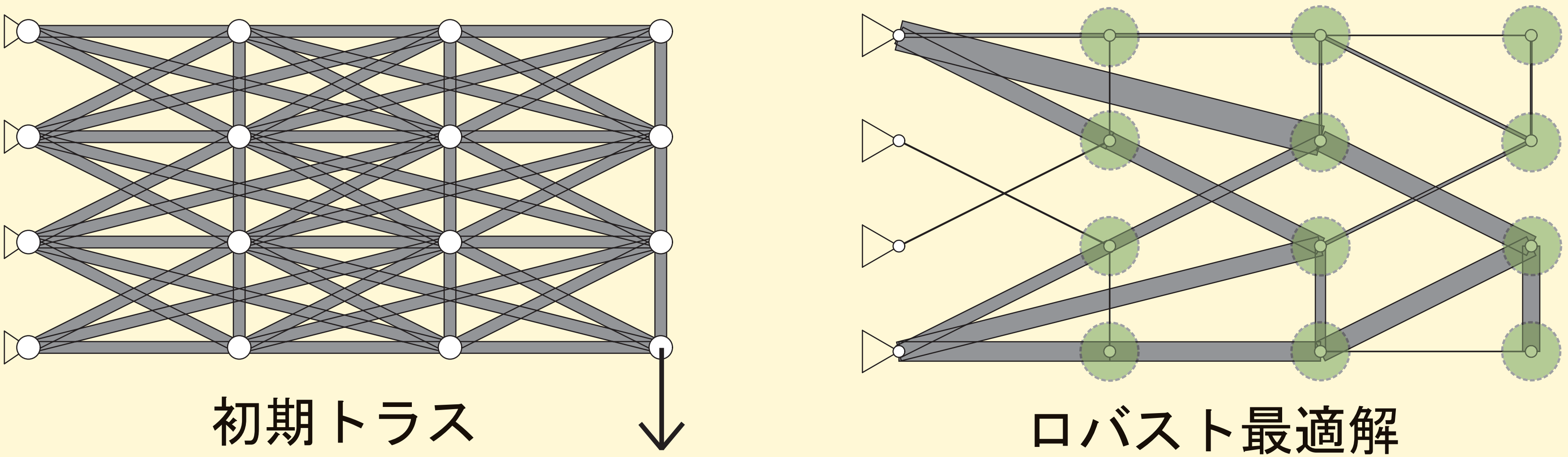
- トラスのコンプライアンス最小化
- 全ての節点に不確定外力を想定　[Ben-Tal & Nemirovski 97]
- — コンプライアンスの最大値を最小化する


初期トラス


ロバスト最適解

動機：ロバスト最適化

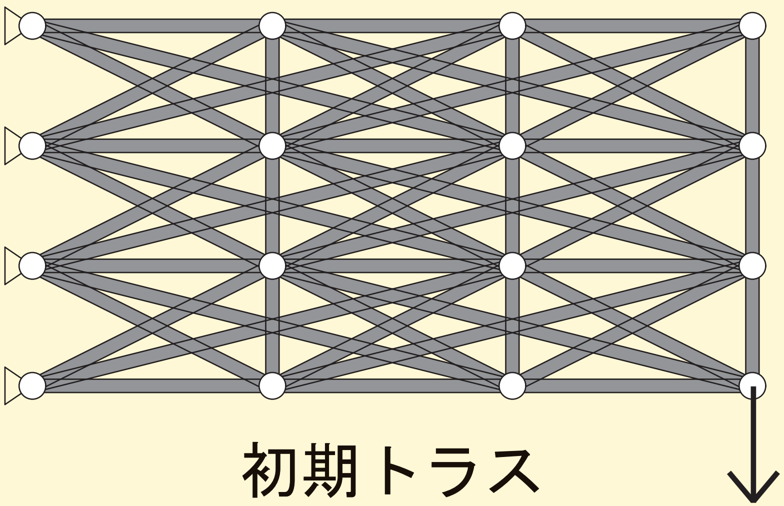
- トラスのコンプライアンス最小化
- 全ての節点に不確定外力を想定　[Ben-Tal & Nemirovski 97]
- — コンプライアンスの最大値を最小化する



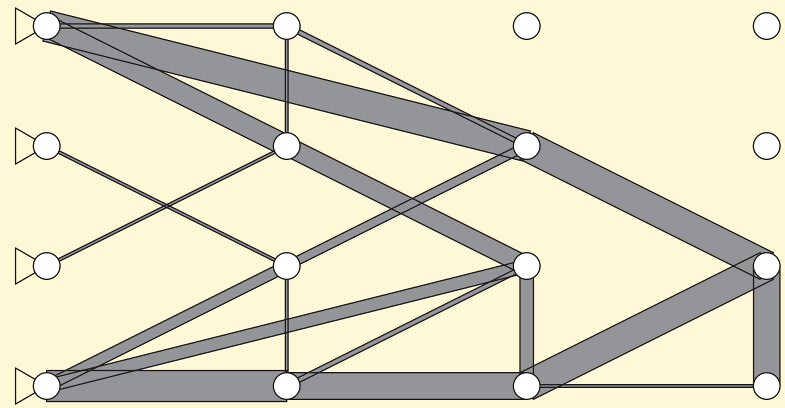
- 得られる解は安定
- 節点集合は変化しない　⇒　位相は (必ずしも) 最適化されない

動機：ロバスト最適化

- トラスのコンプライアンス最小化
- 全ての節点に不確定外力を想定　[Ben-Tal & Nemirovski 97]
- — コンプライアンスの最大値を最小化する



初期トラス



ロバストな位相最適化の解

- 位相の変化を考慮した
  ロバスト最適化問題の定式化・解法を提案する

コンプライアンス最適化

- コンプライアンス

$$c(\boldsymbol{a};\boldsymbol{f}) = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n} \{2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}\}$$

  - $\boldsymbol{a}$: 断面積,　$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})$: 剛性行列,　$\boldsymbol{u}$: 変位,　$\boldsymbol{f}$: 外力

コンプライアンス最適化

- コンプライアンス

$$c(\boldsymbol{a};\boldsymbol{f}) = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n} \{2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}\}$$

  - $\boldsymbol{a}$: 断面積,　$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})$: 剛性行列,　$\boldsymbol{u}$: 変位,　$\boldsymbol{f}$: 外力

- コンプライアンス最小化 ($\boldsymbol{f}$ は固定)

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{a}} \quad & c(\boldsymbol{a};\boldsymbol{f}) \\ \mathrm{s.\,t.} \quad & \boldsymbol{a} \ge \boldsymbol{0}, \quad v(\boldsymbol{a}) \le \bar{V} \end{aligned}$$

コンプライアンス最適化

- コンプライアンス

$$c(\boldsymbol{a};\boldsymbol{f}) = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n} \{2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}\}$$

  - $\boldsymbol{a}$: 断面積，　$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})$: 剛性行列，　$\boldsymbol{u}$: 変位，　$\boldsymbol{f}$: 外力

- コンプライアンス最小化 ($\boldsymbol{f}$ は固定)

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{a}} \quad & c(\boldsymbol{a};\boldsymbol{f}) \\ \mathrm{s.\,t.} \quad & \boldsymbol{a} \ge \boldsymbol{0}, \quad v(\boldsymbol{a}) \le \bar{V} \end{aligned}$$

- コンプライアンスの最大値 (最悪値)

$$\bar{c}_{\max}(\boldsymbol{a}) = \sup_{\boldsymbol{f}\in\mathbf{R}^n} \{c(\boldsymbol{a};\boldsymbol{f}) \mid \boldsymbol{f} \in \bar{\mathcal{F}}\}$$

コンプライアンス最適化

- コンプライアンス

$$c(\boldsymbol{a};\boldsymbol{f}) = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n} \{2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}\}$$

  - $\boldsymbol{a}$: 断面積,　$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})$: 剛性行列,　$\boldsymbol{u}$: 変位,　$\boldsymbol{f}$: 外力

- コンプライアンス最小化 ($\boldsymbol{f}$ は固定)

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{a}} \quad & c(\boldsymbol{a};\boldsymbol{f}) \\ \mathrm{s.\,t.} \quad & \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0}, \quad v(\boldsymbol{a}) \leq \bar{V} \end{aligned}$$

- コンプライアンスの最大値 (最悪値)

$$\bar{c}_{\max}(\boldsymbol{a}) = \sup_{\boldsymbol{f}\in\mathbf{R}^n} \{c(\boldsymbol{a};\boldsymbol{f}) \mid \boldsymbol{f} \in \bar{\mathcal{F}}\}$$

- ロバストなコンプライアンス最小化 : $\bar{c}_{\max}(\boldsymbol{a})$ を最小化する

外力の不確定性モデル

- 公称値 $\tilde{\boldsymbol{f}} \in \mathbf{R}^n$
- 不確定性集合　[Ben-Tal & Nemirovski 97]

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}} = \{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e} \mid 1 \geq \|\boldsymbol{e}\|\}}$$

外力の不確定性モデル

- 公称値 $\tilde{\boldsymbol{f}} \in \mathbf{R}^n$
- 不確定性集合　[Ben-Tal & Nemirovski 97]

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}} = \{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e} \mid 1 \geq \|\boldsymbol{e}\|\}}$$

  - $\boldsymbol{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$: ばらつきを表す行列

$$\boxed{\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{f}} & r\boldsymbol{v}_1 & r\boldsymbol{v}_2 & \cdots & r\boldsymbol{v}_{n-1} \end{bmatrix}}$$

  - $r \geq 0$: ばらつきの大きさ
  - $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{n-1}$: $\tilde{\boldsymbol{f}}$ の直交補空間の基底
  - 全ての節点に不確定外力を想定

外力の不確定性モデル

- 公称値 $\tilde{\boldsymbol{f}} \in \mathbf{R}^n$
- 不確定性集合　[Ben-Tal & Nemirovski 97]

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}} = \{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e} \mid 1 \geq \|\boldsymbol{e}\|\}}$$

- 設計に依存する不確定性モデル　[提案]

$$\boxed{\mathcal{F}(\boldsymbol{p}) = \{\mathrm{diag}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e} \mid 1 \geq \|\boldsymbol{e}\|\}}$$

外力の不確定性モデル

- 公称値 $\tilde{\boldsymbol{f}} \in \mathbf{R}^n$
- 不確定性集合　[Ben-Tal & Nemirovski 97]

$$\bar{\mathcal{F}} = \{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e} \mid 1 \geq \|\boldsymbol{e}\|\}$$

- 設計に依存する不確定性モデル　[提案]

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{p}) = \{\mathrm{diag}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e} \mid 1 \geq \|\boldsymbol{e}\|\}$$

  - $\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^n$: 節点 (の自由度) の存在を表すベクトル

$$p_j = \begin{cases} 1 & \text{if 自由度 } j \text{ が存在} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

最適化の過程で節点が消えれば，対応する j について $p_j = 0$ とする

断面積の下限値

- 断面積の下限値に関する制約条件

$$a_i = 0 \quad \text{or} \quad a_{\min} \le a_i \le a_{\max} \qquad (\spadesuit)$$

- 部材の存在を表す変数 t_i を導入

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{if 部材 } i \text{ が存在} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

断面積の下限値

- 断面積の下限値に関する制約条件

$$a_i = 0 \quad \text{or} \quad a_{\min} \leq a_i \leq a_{\max} \qquad (\spadesuit)$$

- 部材の存在を表す変数 t_i を導入

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{if 部材 } i \text{ が存在} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $(\spadesuit) \Leftrightarrow$

$$a_i \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \leq t_i \begin{bmatrix} a_{\max} \\ -a_{\min} \end{bmatrix}$$

断面積の下限値

- 断面積の下限値に関する制約条件

$$a_i = 0 \quad \text{or} \quad a_{\min} \le a_i \le a_{\max} \qquad (\spadesuit)$$

- 部材の存在を表す変数 t_i を導入

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{if 部材 } i \text{ が存在} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $(\spadesuit) \Leftrightarrow$

$$a_i \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \le t_i \begin{bmatrix} a_{\max} \\ -a_{\min} \end{bmatrix}$$

- 部材の存在 t_i と 節点の自由度の存在 p_j の関係

$$0 \le p_j \le 1$$
$$t_i \le p_j, \quad \forall i \in \{ i \mid \text{部材 } i \text{ が自由度 } j \text{ に接続} \}$$

コンプライアンスの最悪値

- コンプライアンスの最悪値 (定義)

$$\boxed{c_{\max}(\boldsymbol{a}) = \sup_{\boldsymbol{f} \in \mathbf{R}^n} \{ c(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{f}) \mid \boldsymbol{f} \in \mathcal{F}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a})) \}}$$

  - ただし，$\mathcal{F}(\boldsymbol{p}) = \{ \mathrm{diag}(\boldsymbol{p}) \boldsymbol{Q} \boldsymbol{e} \mid 1 \ge \|\boldsymbol{e}\| \}$
  - $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{a}$ の関数

コンプライアンスの最悪値

- コンプライアンスの最悪値 (定義)

$$c_{\max}(\boldsymbol{a}) = \sup_{\boldsymbol{f} \in \mathbf{R}^n} \{c(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{f}) \mid \boldsymbol{f} \in \mathcal{F}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}))\}$$

  - ただし，$\mathcal{F}(\boldsymbol{p}) = \{\mathrm{diag}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e} \mid 1 \geq \|\boldsymbol{e}\|\}$
  - $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{a}$ の関数

- Schur の補元に関する補題より

$$\tau \geq c_{\max}(\boldsymbol{a}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \tau \boldsymbol{I} & (\mathrm{diag}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{K}(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix} \succeq \boldsymbol{O}$$

(半正定値)

ロバスト位相最適化問題

- 最悪コンプライアンスの最小化

$$\boxed{\begin{aligned} \min \quad & \tau \\ \mathrm{s.\,t.} \quad & \tau \geq c_{\max}(\boldsymbol{a}) \end{aligned}}$$

ロバスト位相最適化問題

- 最悪コンプライアンスの最小化

$$\begin{aligned} \min \quad & \tau \\ \mathrm{s.\,t.} \quad & \tau \geq c_{\max}(\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

- 0–1 変数を含む半正定値計画問題 として定式化

$$\begin{aligned} \min_{\tau,\boldsymbol{a},\boldsymbol{t},\boldsymbol{p}} \quad & \tau \\ \mathrm{s.\,t.} \quad & \begin{bmatrix} \tau \boldsymbol{I} & (\mathrm{diag}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{K}(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix} \succeq \boldsymbol{O} \\ & 0 \leq p_j \leq 1 \\ & t_i \leq p_j, \quad \forall i \in \{ i \mid \text{部材 } i \text{ が自由度 } j \text{ に接続} \} \\ & a_i \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \leq t_i \begin{bmatrix} a_{\max} \\ -a_{\min} \end{bmatrix} \\ & \boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0}, \quad v(\boldsymbol{a}) \leq \bar{V} \\ & t_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

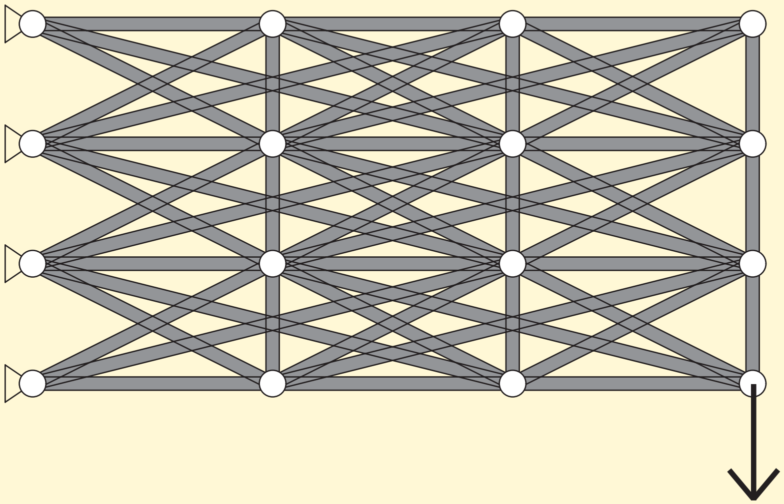
ロバスト位相最適化問題

- 最悪コンプライアンスの最小化

$$\begin{array}{ll} \min & \tau \\ \mathrm{s.\,t.} & \tau \geq c_{\max}(\boldsymbol{a}) \end{array}$$

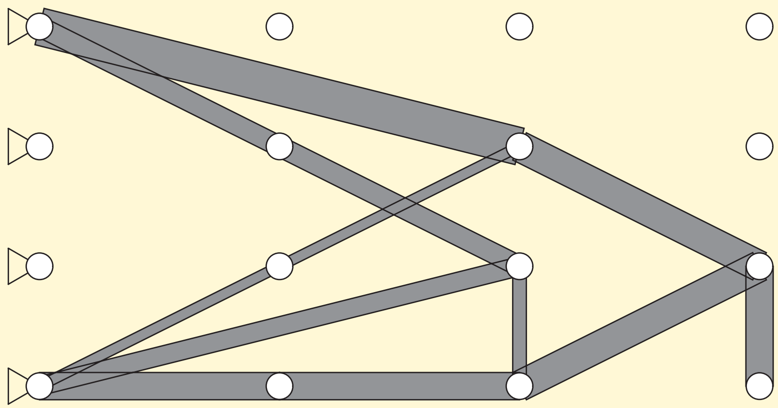
- 0–1 変数を含む半正定値計画問題 として定式化
  - 0–1 制約を緩和すると半正定値計画問題
    $\rightarrow$ 主双対内点法で容易に解ける
  - 0–1 変数に関する分枝限定法
    $\rightarrow$ 大域的最適解が得られる

ex.) 51 部材トラス

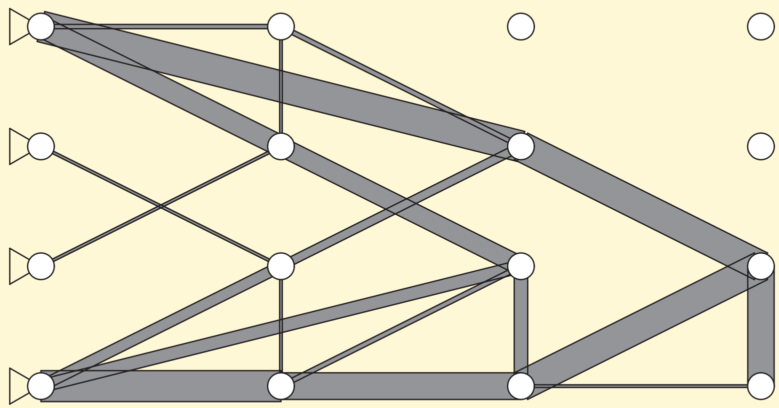


初期トラス

ex.) 51 部材トラス

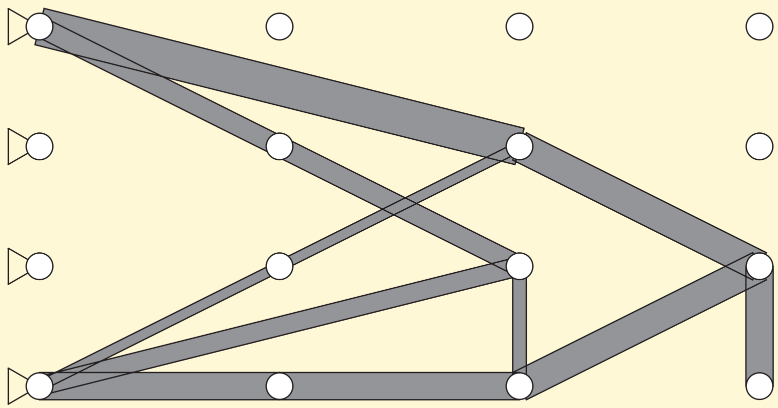


通常の最適解 (♣)

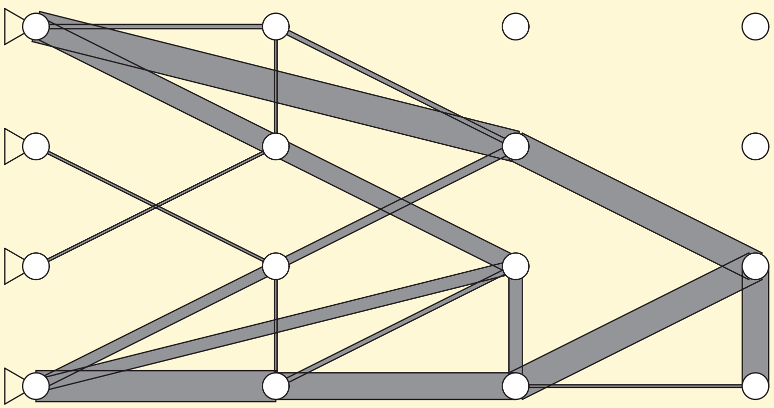


ロバスト最適解 (大域的最適解)

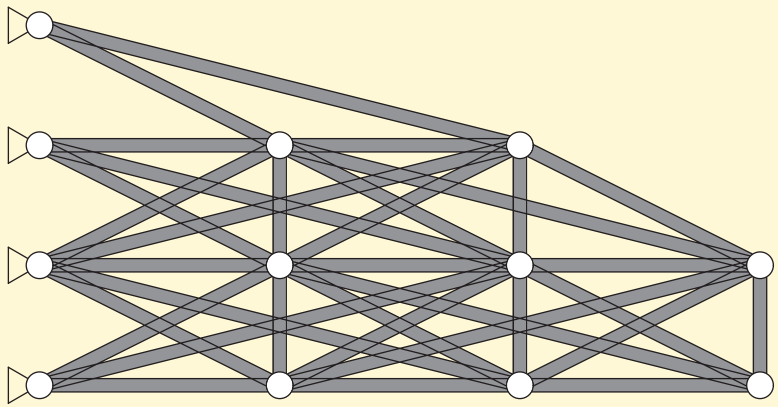
ex.) 51 部材トラス



通常の最適解 (♣)

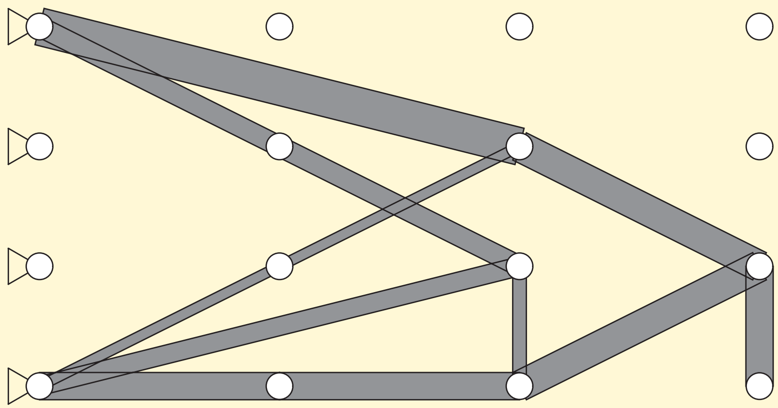


ロバスト最適解 (大域的最適解)

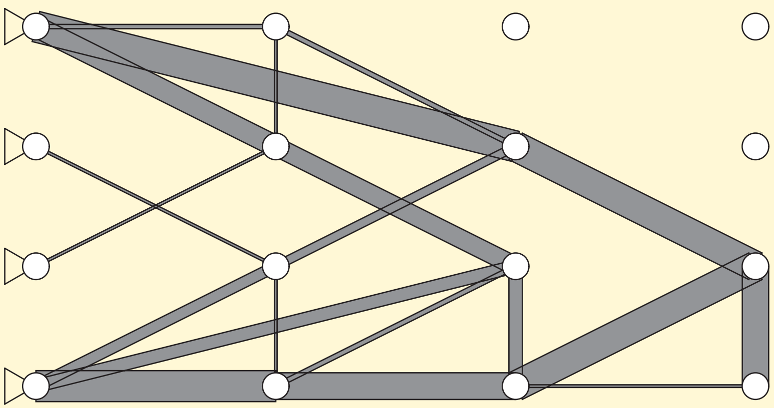


(♣) から推測される初期解 ($\mathrm{Ini}_{♣}$)

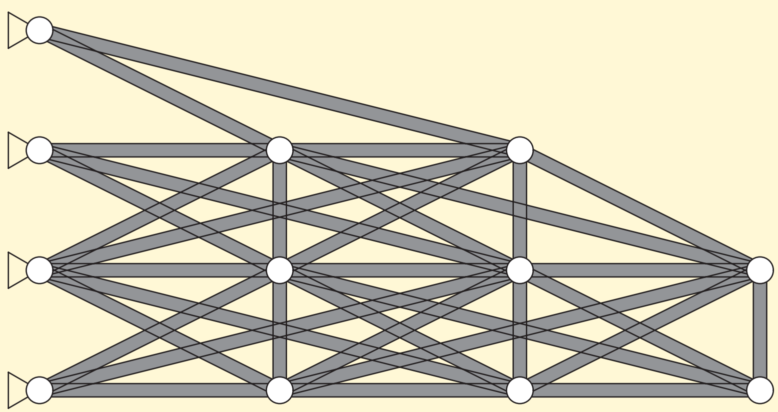
ex.) 51 部材トラス



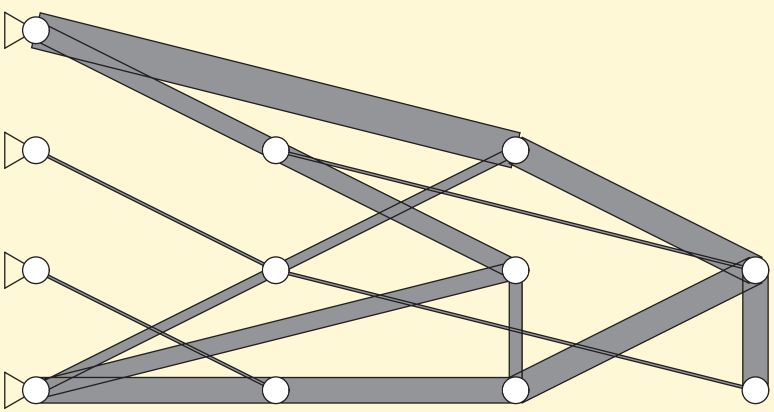
通常の最適解 (♣)



ロバスト最適解 (大域的最適解)



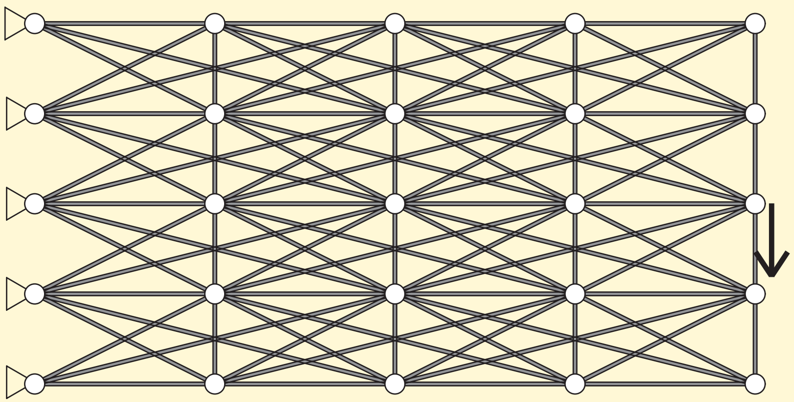
(♣) から推測される初期解 (Ini♣)



(Ini♣) から得られる
ロバスト最適解
≠ 大域的最適解

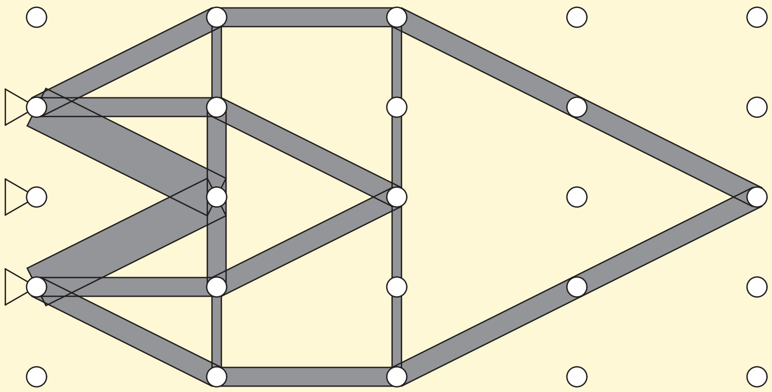
Y. Kanno

ex.) 92 部材トラス

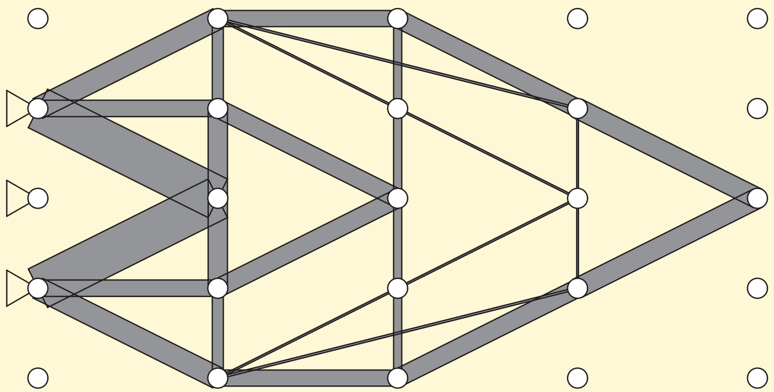


初期トラス

ex.) 92 部材トラス

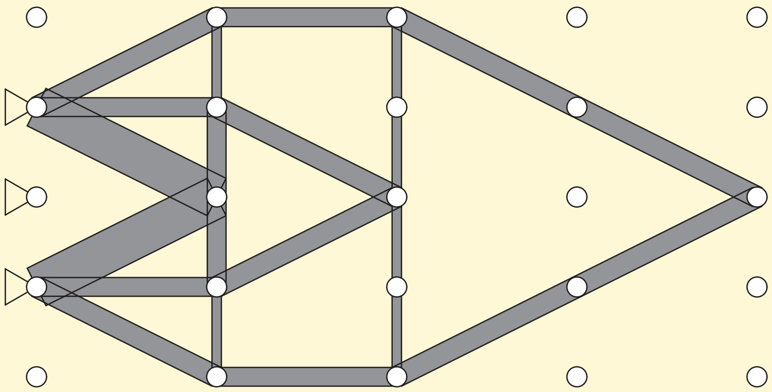


通常の最適解

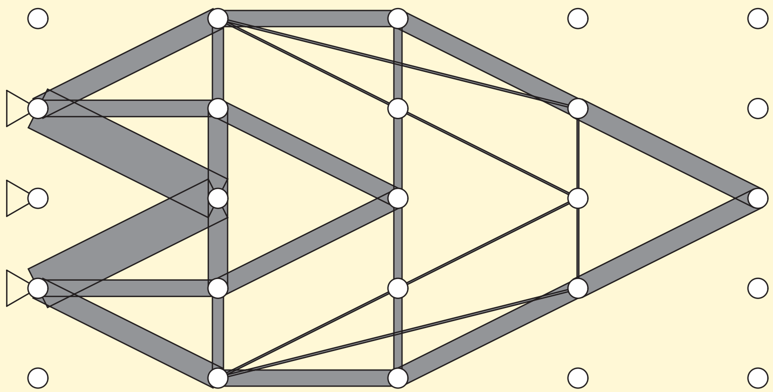


ロバスト最適解

ex.) 92 部材トラス



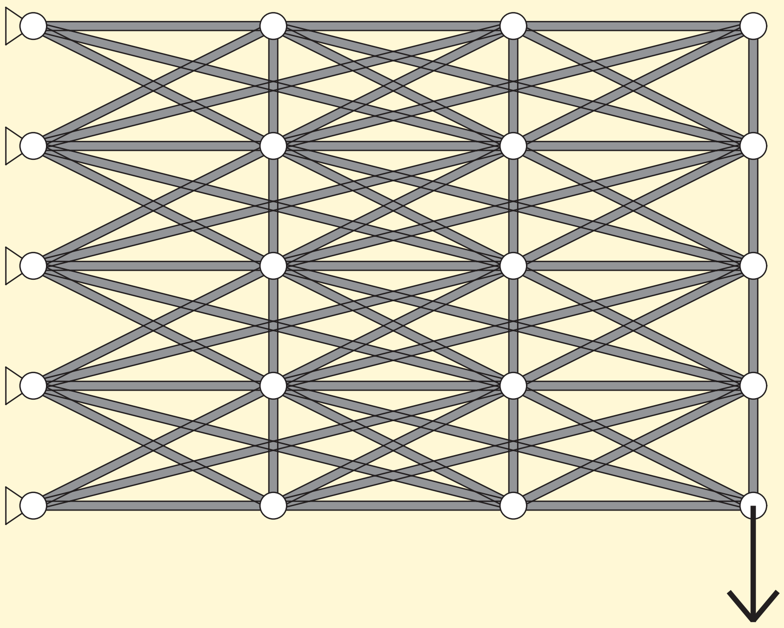
通常の最適解



ロバスト最適解

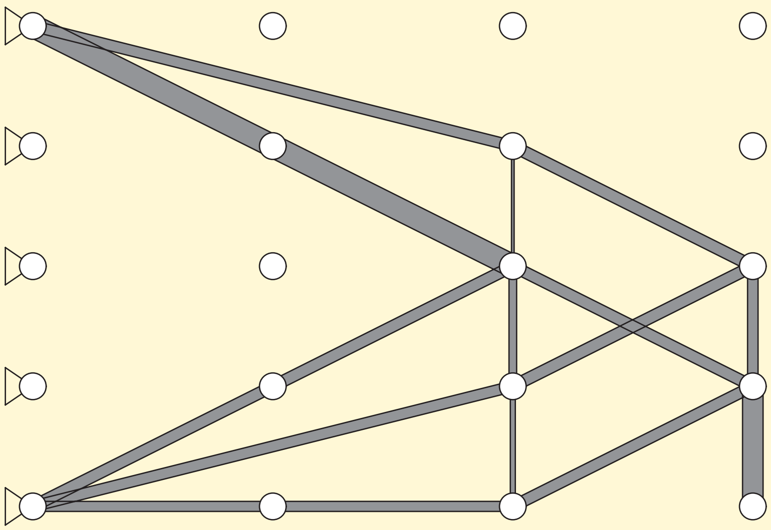
	$c_{\max}\,(\mathrm{kN}\cdot\mathrm{cm})$	$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{D}$	n	Nodes	CPU (s)
(TO)	10.2038	22	26	1	11.4
(RTO)	10.5247	30	28	9444	57,176.0

ex.) 67 部材トラス

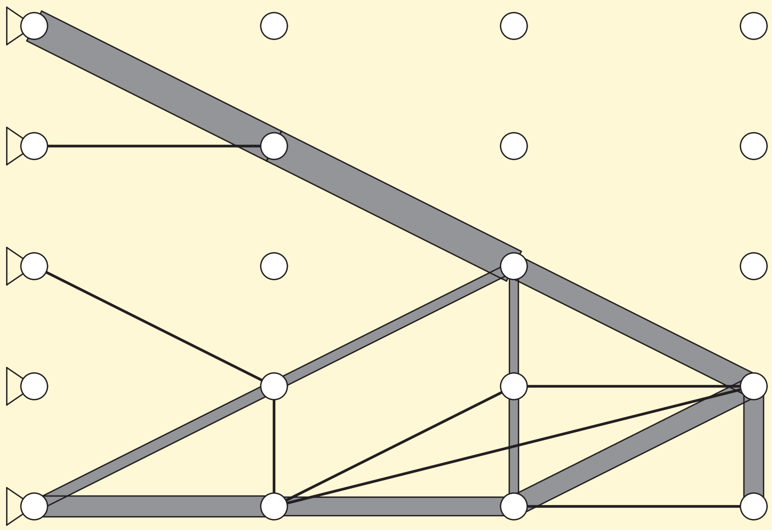


初期トラス

ex.) 67 部材トラス

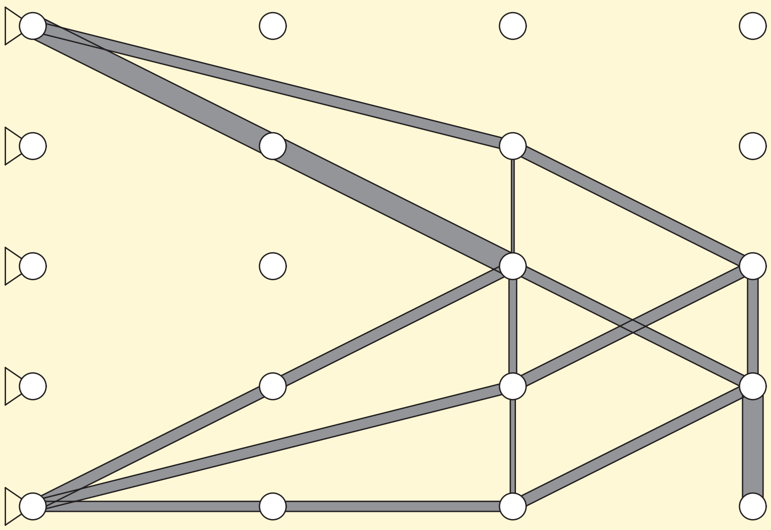


通常の最適解

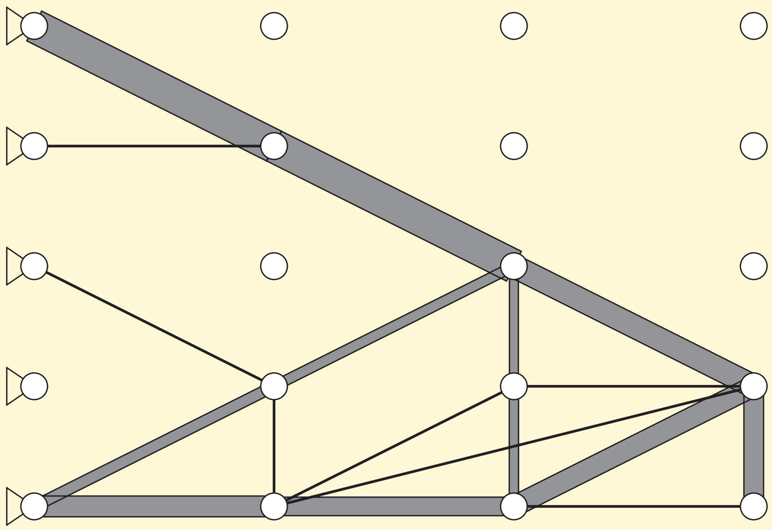


ロバスト最適解

ex.) 67 部材トラス



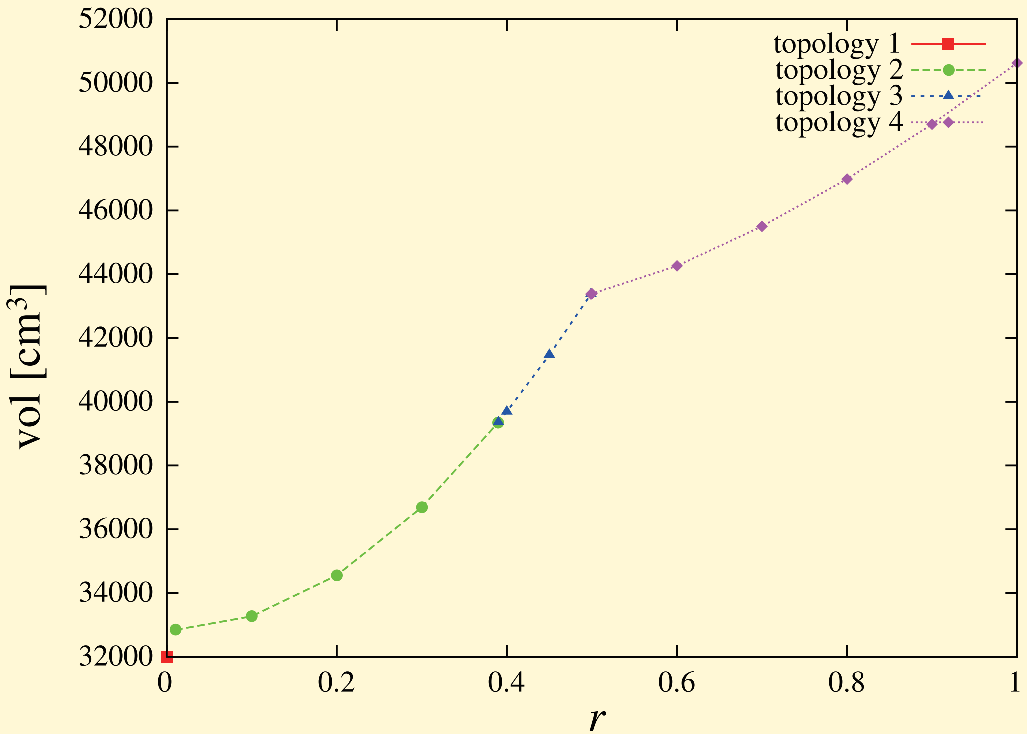
通常の最適解



ロバスト最適解

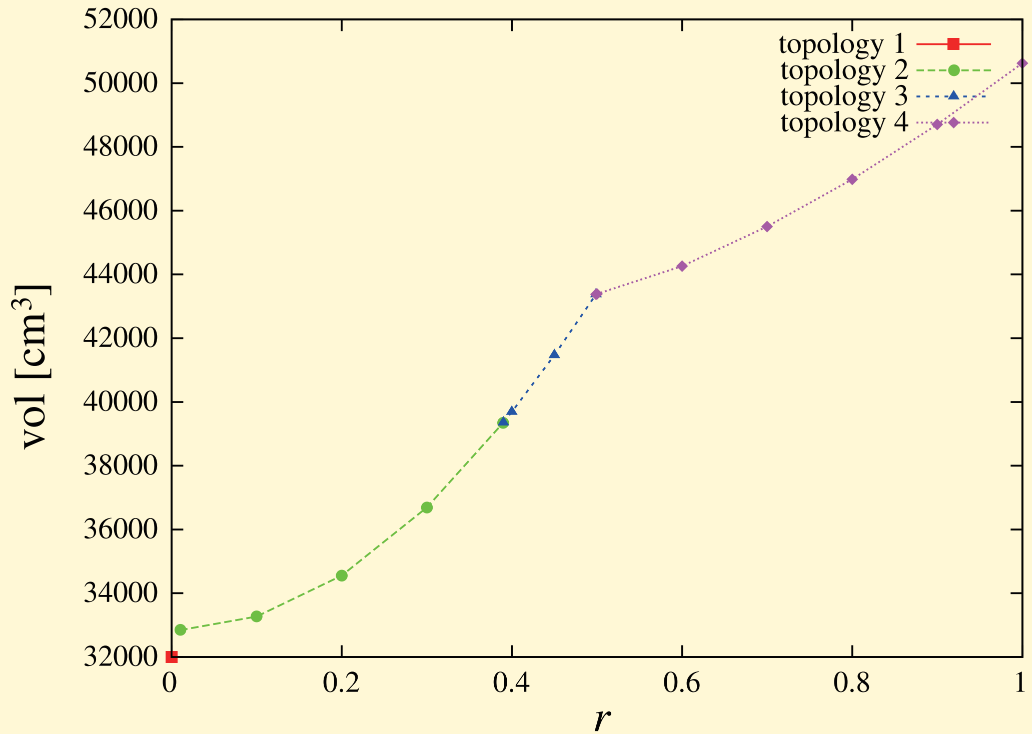
	$c_{\max}$ (kN · cm)	rank $\boldsymbol{D}$	n	Nodes	CPU (s)
(TO)	3.4105	16	20	1	3.8
(RTO)	3.5585	17	16	8396	14,300.0

不確定性の大きさと最適位相の関係 (22 部材トラス)

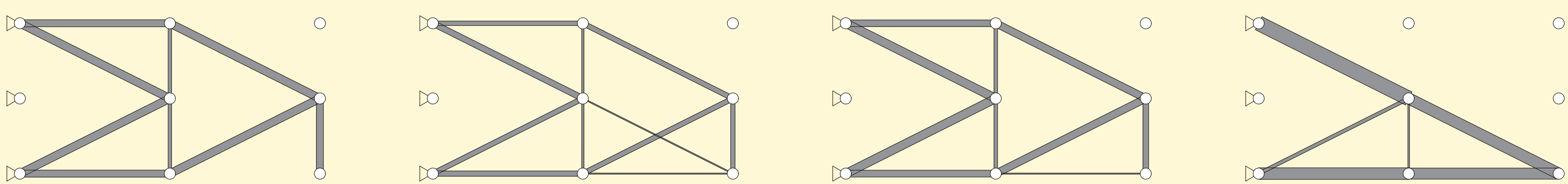


- 不確定性の大きさ r
  vs.
  最適解の体積 vol
- コンプライアンスの上限を指定,
  体積を最小化

不確定性の大きさと最適位相の関係 (22 部材トラス)



- 不確定性の大きさ r
  vs.
  最適解の体積 vol
- コンプライアンスの上限を指定，体積を最小化



topology 1　topology 2　topology 3　topology 4

ここまでのまとめ

- ロバスト最適設計
  - 構造物に要求される性能が制約
  - ロバスト制約：最悪の場合でも制約を満たすことを要請
- トラスのロバスト最適化
  - コンプライアンス（の最悪値）の最小化
  - 外力の不確定性

    $\longrightarrow$ 最適解は必ず安定なトラス
  - 大域的最適化
    - 整数変数を含む半正定値計画問題
    - 分枝限定法 ＆ 主双対内点法

応力制約 について

- 応力制約には 固有の難しさがある
- （トラスの）応力は 変位 $\boldsymbol{u}$ の線形関数

応力制約 について

- 応力制約には 固有の難しさがある
- （トラスの）応力は 変位 $\boldsymbol{u}$ の線形関数 (!)
  - 部材 i の断面積 > 0 $\Rightarrow$ 線形制約
  - 部材 i の断面積 $= 0$ $\Rightarrow$ 制約を取り除くべき

  (!) 全体としては 非線形の制約

ロバスト最適設計（復習）

- 通常の最適設計

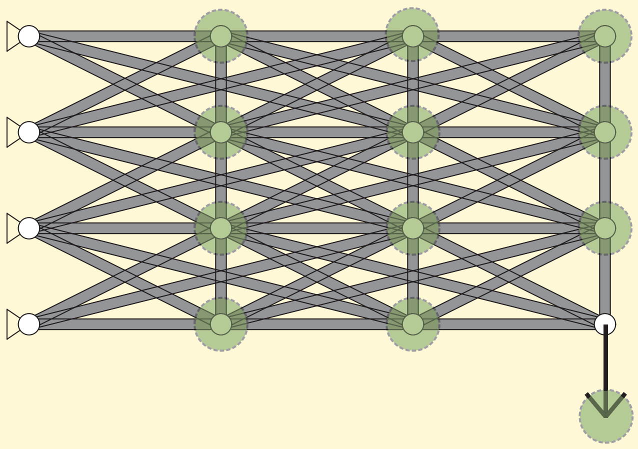
$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} \quad vol(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t.} \quad g_q(\boldsymbol{u}) \leq 0, \quad \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$

  - $\boldsymbol{x}$: 部材の断面積　$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$: 剛性行列　$\boldsymbol{u}$: 変位　$\boldsymbol{f}$: 外力

- ロバスト制約

$$\max_{\boldsymbol{u}} \{ g_q(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \in \bar{\mathcal{F}} \} \leq 0 \qquad (♠)$$

- $\bar{\mathcal{F}}$: 外力の不確定性集合



ロバスト最適設計（復習）

- 通常の最適設計

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \quad vol(\boldsymbol{x})$$
$$\mathrm{s.\,t.} \quad g_q(\boldsymbol{u}) \le 0, \quad \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$$

  - $\boldsymbol{x}$: 部材の断面積　$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$: 剛性行列　$\boldsymbol{u}$: 変位　$\boldsymbol{f}$: 外力

- ロバスト制約

$$\max_{\boldsymbol{u}}\{g_q(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \in \bar{\mathcal{F}}\} \le 0 \qquad (\spadesuit)$$

- $\bar{\mathcal{F}}$: 外力の不確定性集合
- ロバスト最適設計

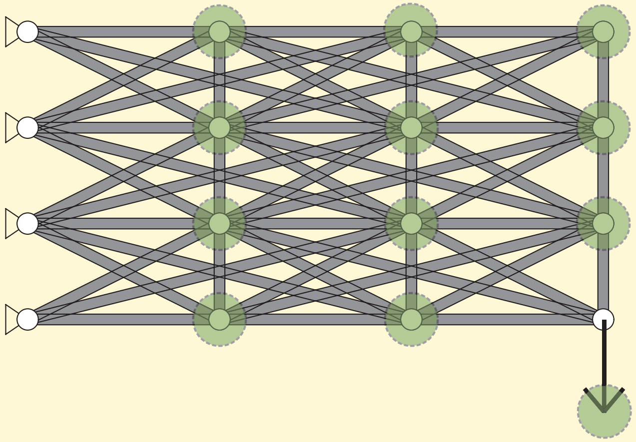
$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \quad vol(\boldsymbol{x})$$
$$\mathrm{s.\,t.} \quad (\spadesuit)$$

不確定性のモデル

- 不確定性集合

$$\bar{\mathcal{F}} = \{\tilde{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{F}_0 \boldsymbol{\zeta} \mid \alpha \geq \|\boldsymbol{\zeta}_j\| \ (\forall j)\}$$

  - $\boldsymbol{F}_0$: 定行列　（単位行列など）
  - $\alpha \geq 0$: 不確定性のレベル
  - j : 節点の番号
  - すべての節点に外力が作用し得る



不確定性のモデル

- 不確定性集合

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}} = \{\tilde{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{F}_0 \boldsymbol{\zeta} \mid \alpha \geq \|\boldsymbol{\zeta}_j\| \ (\forall j)\}}$$

- 設計に依存する不確定性集合

$$\boxed{\mathcal{F}(\boldsymbol{s}) = \{\tilde{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{F}_0 \boldsymbol{\zeta} \mid \alpha s_j \geq \|\boldsymbol{\zeta}_j\| \ (\forall j)\}}$$

不確定性のモデル

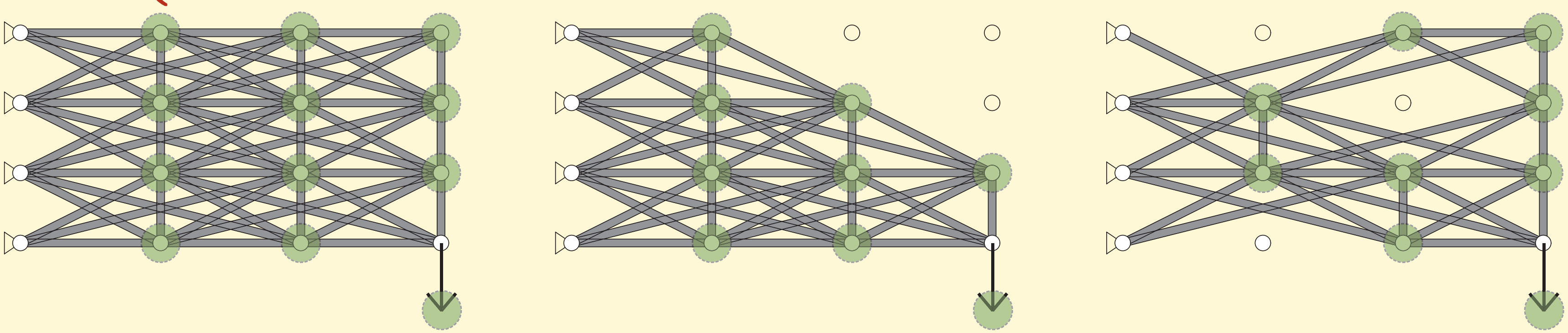
- 不確定性集合

$$\bar{\mathcal{F}} = \{\tilde{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{F}_0 \boldsymbol{\zeta} \mid \alpha \geq \|\boldsymbol{\zeta}_j\| \ (\forall j)\}$$

- 設計に依存する不確定性集合

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{s}) = \{\tilde{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{F}_0 \boldsymbol{\zeta} \mid \alpha s_j \geq \|\boldsymbol{\zeta}_j\| \ (\forall j)\}$$

  - $s_j = \begin{cases} 1 & \text{if 節点 } j \text{ が存在} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$



不確定性のモデル

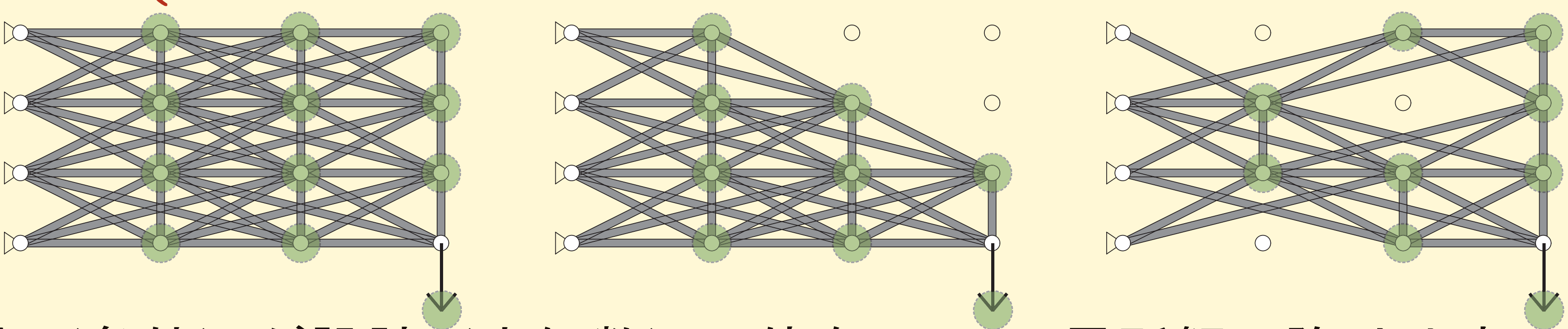
- 不確定性集合

$$\bar{\mathcal{F}} = \{\tilde{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{F}_0 \zeta \mid \alpha \geq \|\boldsymbol{\zeta}_j\| \ (\forall j)\}$$

- 設計に依存する不確定性集合

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{s}) = \{\tilde{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{F}_0 \zeta \mid \alpha s_j \geq \|\boldsymbol{\zeta}_j\| \ (\forall j)\}$$

  - $s_j = \begin{cases} 1 & \text{if 節点 } j \text{ が存在} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$



- 外力（条件）が設計（未知数）に依存 $\rightarrow$ 局所解に陥りやすい

離散断面積

- 部材の断面積：x_i

$$\boxed{x_i \in \{0, \xi_1, \dots, \xi_k\}}$$

- 0–1 変数 t_{ip} を用いて e.g., [Stolpe & Svanberg 03]

$$\boxed{x_i = \sum_{p=1}^{k} \xi_p t_{ip}, \quad \sum_{p=1}^{k} t_{ip} \le 1}$$

離散断面積

- 部材の断面積 : x_i

$$x_i \in \{0, \xi_1, \dots, \xi_k\}$$

- 0–1 変数 t_{ip} を用いて　　e.g., [Stolpe & Svanberg 03]

$$x_i = \sum_{p=1}^{k} \xi_p t_{ip}, \quad \sum_{p=1}^{k} t_{ip} \le 1$$

- 節点の存在を示す変数 s_j と t_{ip} の関係

$$t_{ip} \le s_j \le 1$$

$$s_j \le \sum_{i \in \mathcal{I}_j} \sum_{p=1}^{k} t_{ip}$$

  - $i \in \mathcal{I}_j \quad \Leftrightarrow \quad$ 部材 i が節点 j に接続している

応力制約

- 応力 σ_i のロバスト制約

$$\max_{\boldsymbol{u}}\{\sigma_i(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}(\boldsymbol{s})\} \le \bar{\sigma} \qquad (\diamondsuit\text{a})$$

$$\min_{\boldsymbol{u}}\{\sigma_i(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}(\boldsymbol{s})\} \ge -\bar{\sigma} \qquad (\diamondsuit\text{b})$$

- 制約 ($\diamondsuit$) は KKT 条件に書き直せる (Lagrange 乗数を用いる)

応力制約

- 応力 σ_i のロバスト制約

$$\max_{\boldsymbol{u}}\{\sigma_i(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}(\boldsymbol{s})\} \le \bar{\sigma} \qquad (\Diamond\text{a})$$

$$\min_{\boldsymbol{u}}\{\sigma_i(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}(\boldsymbol{s})\} \ge -\bar{\sigma} \qquad (\Diamond\text{b})$$

- 制約 ($\Diamond$) は KKT 条件に書き直せる　(Lagrange 乗数を用いる)
- $x_i = 0 \ \Rightarrow$ 応力制約を取り除く

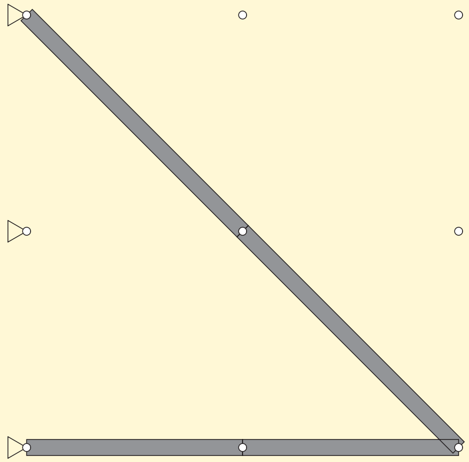
$$|\sigma_i(\boldsymbol{u})| \le \bar{\sigma} + M(1 - t_i), \qquad t_i = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i > 0 \\ 0 & \text{if } x_i = 0 \end{cases}$$

- Lagrange 乗数の制約も同様にして取り除く

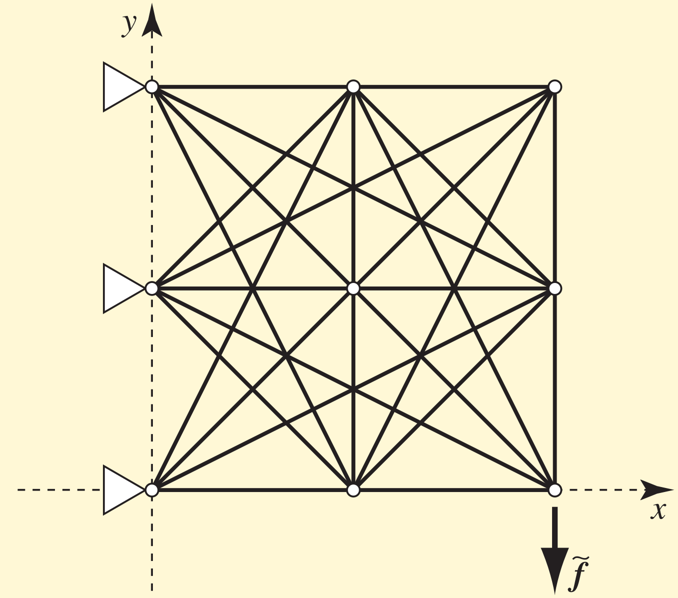
混合整数計画問題

- 有限個の部材断面積の候補
- 不確定な外力
    - 存在する節点のみに作用する　　$\leftarrow$ 設計に依存
- 応力制約
    - 存在する部材のみに課す　　$\leftarrow$ 設計に依存
    - Lagrange 乗数についても同様
- トラスの安定性
    - 必要条件を定式化

Ex.) 26 部材トラス ($\mathcal{X} = \{0, 20\}^m$, $\|\tilde{f}\| = 10.0$)

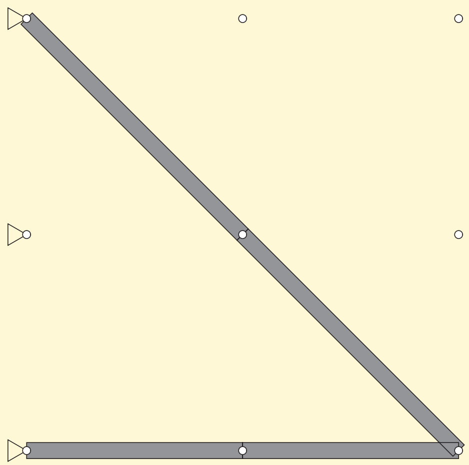


通常の最適解

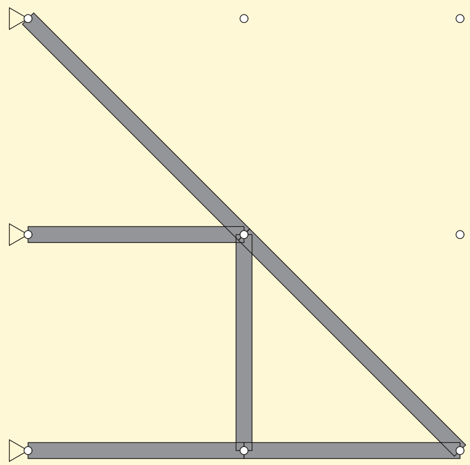


初期設定

Ex.) 26 部材トラス ($\mathcal{X} = \{0, 20\}^m$, $\|\tilde{f}\| = 10.0$)



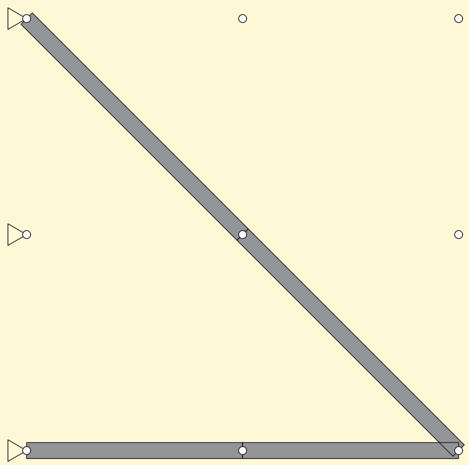
通常の最適解



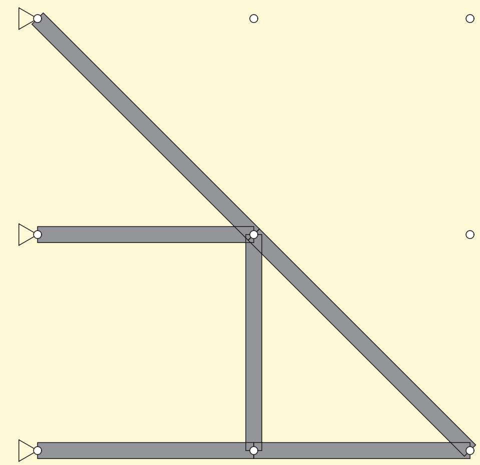
ロバスト最適解 ($\alpha = 1.0$)

- ロバスト最適解の存在部材は不確定性のレベル に依存する

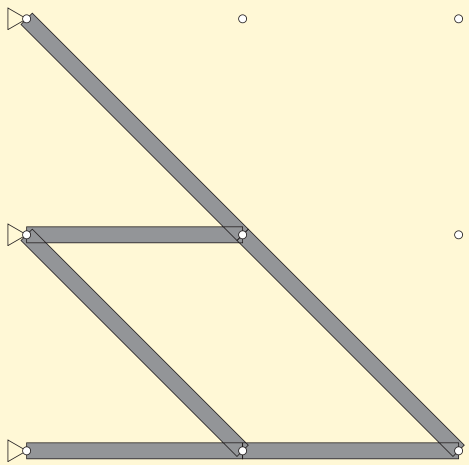
Ex.) 26 部材トラス ($\mathcal{X} = \{0, 20\}^m$, $\|\tilde{f}\| = 10.0$)



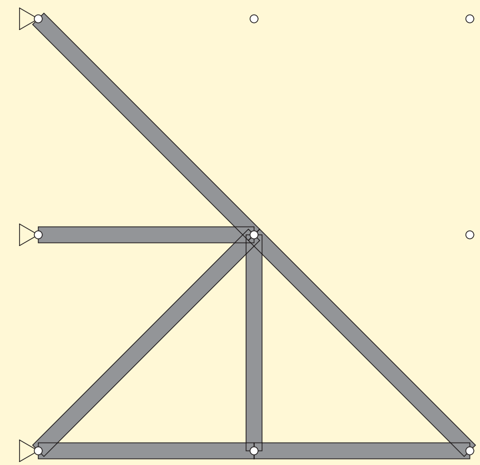
通常の最適解



ロバスト最適解 $(\alpha = 1.0)$



ロバスト最適解 $(\alpha = 1.5)$



ロバスト最適解 $(\alpha = 3.0)$

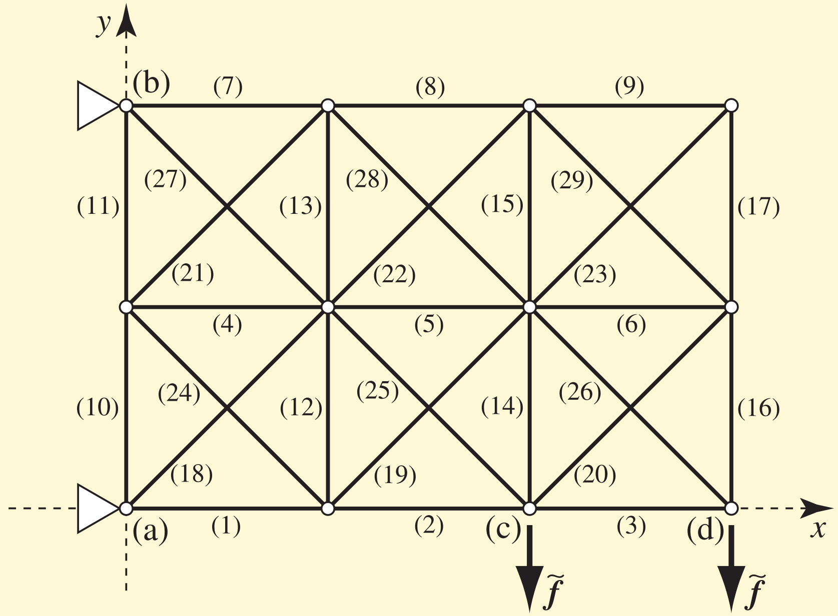
Ex.) 26 部材トラス ($\mathcal{X} = \{0, 20\}^m$, $\|\tilde{\boldsymbol{f}}\| = 10.0$)

- MIP solver: CPLEX Ver. 11.2

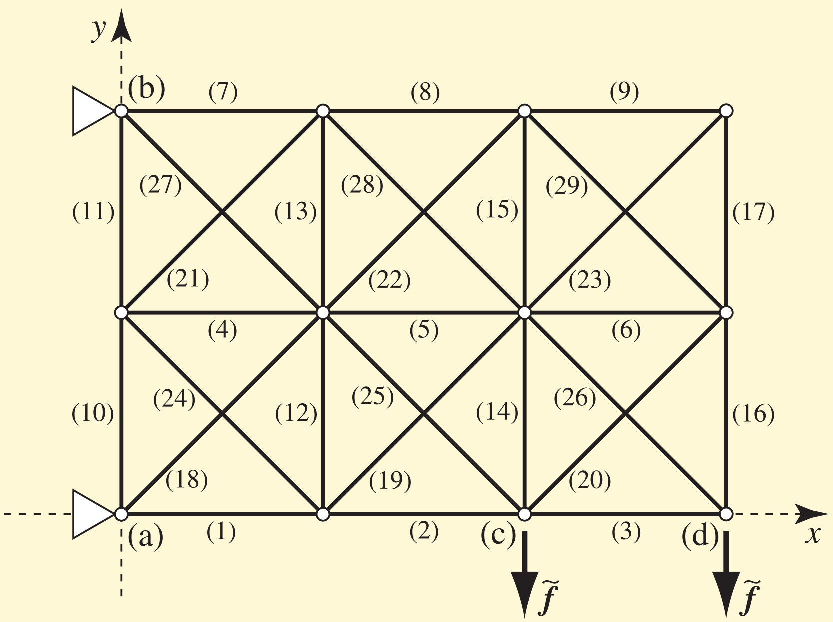
α	Vol. (cm^3)	CPU (s)
nominal	9656.9	≤ 0.1
1.0	13656.9	$4{,}029.8$
1.5	14485.3	$9{,}241.6$
3.0	16485.3	$630{,}338.8$
3.3	16485.3	$29{,}507.6$

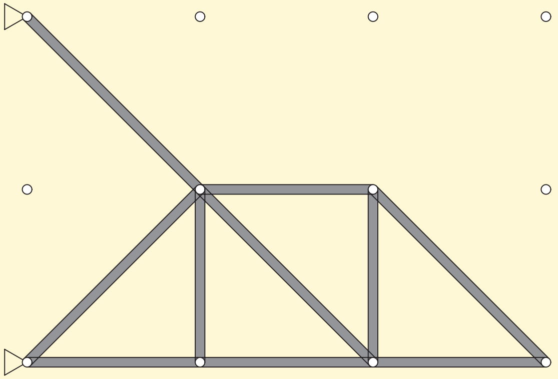
Ex.) 29 部材トラス ($\alpha = 1.0$)

- ロバスト最適解の存在部材は部材断面積の候補 に依存



Ex.) 29 部材トラス ($\alpha = 1.0$)

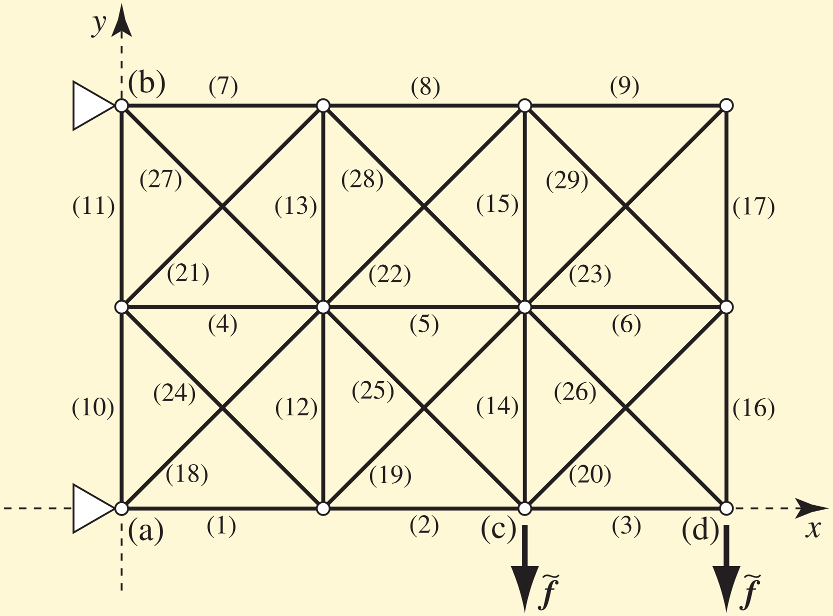


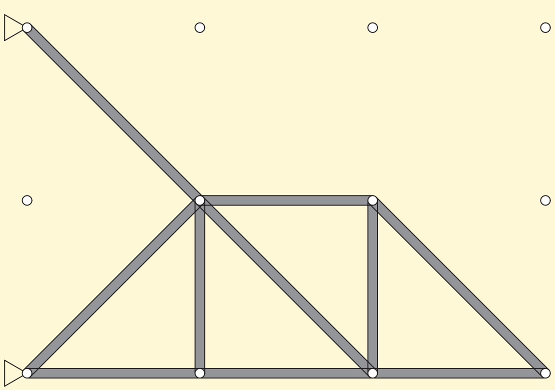


ロバスト最適解

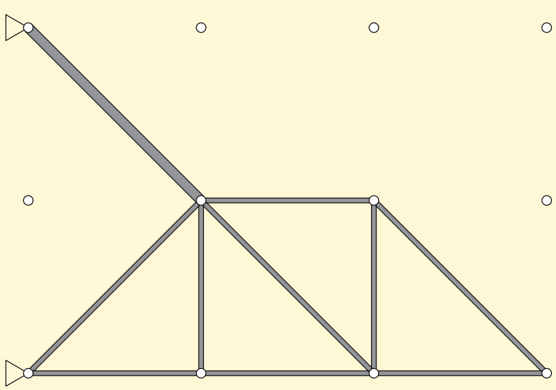
$(\mathcal{X} = \{0, 10\}^m)$

Ex.) 29 部材トラス ($\alpha = 1.0$)

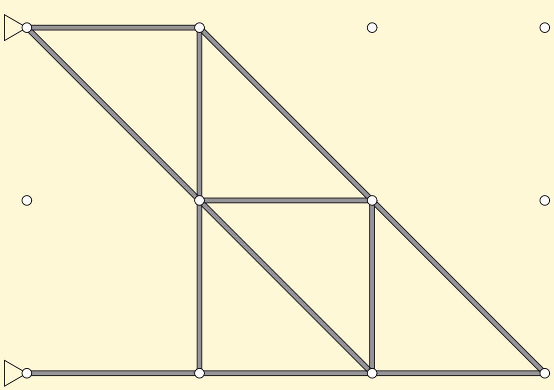




ロバスト最適解
$(\mathcal{X} = \{0, 10\}^m)$

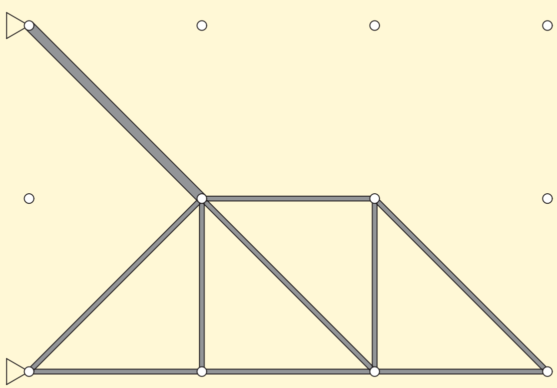


ロバスト最適解
$(\mathcal{X} = \{0, 5, 10\}^m)$

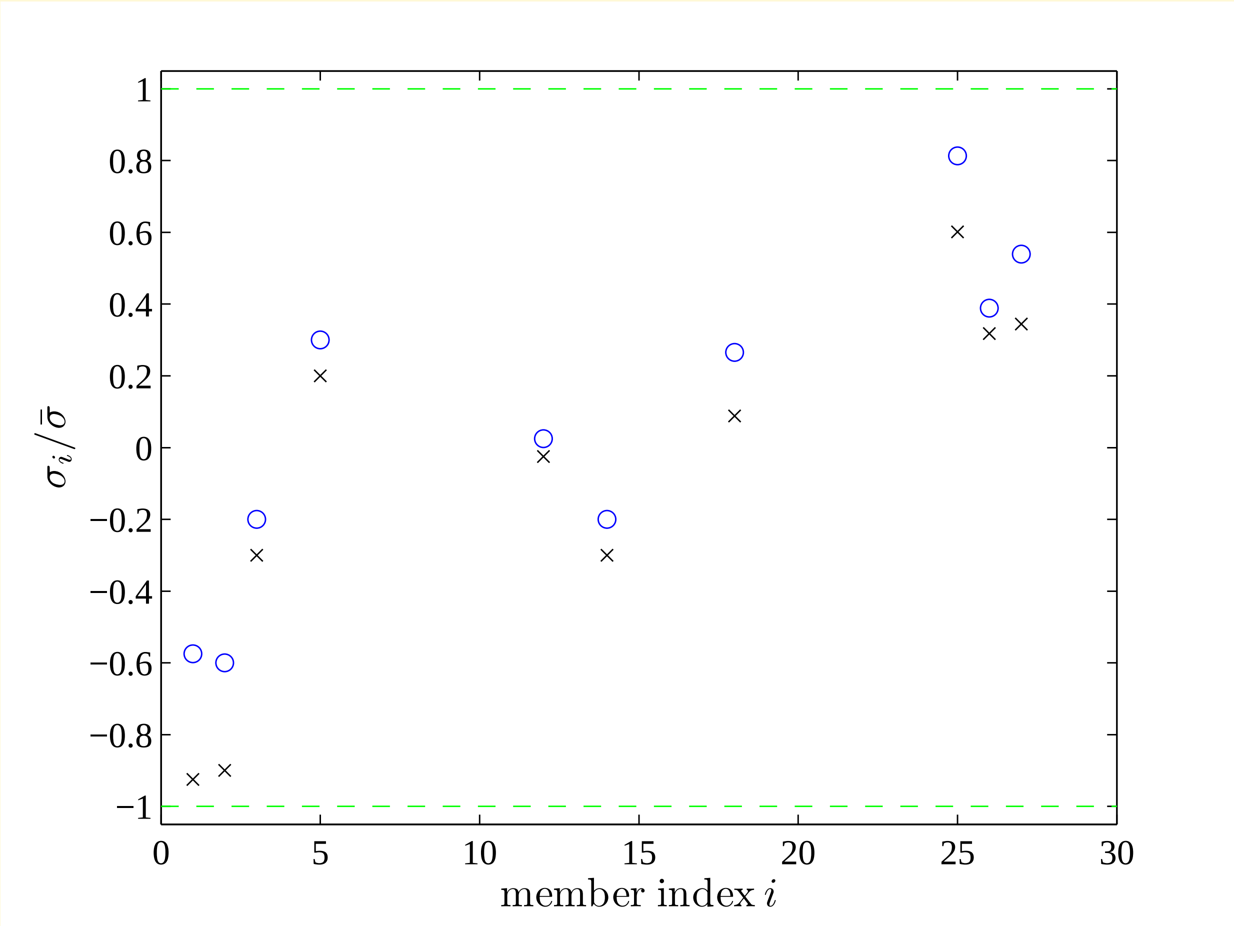


ロバスト最適解
$(\mathcal{X} = \{0, 5, 15\}^m)$

Ex.) 29 部材トラス ($\alpha = 1.0$)

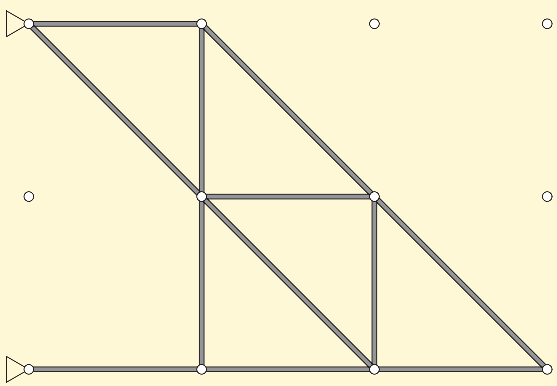


robust opt.
$(\mathcal{X} = \{0, 5, 10\}^m)$



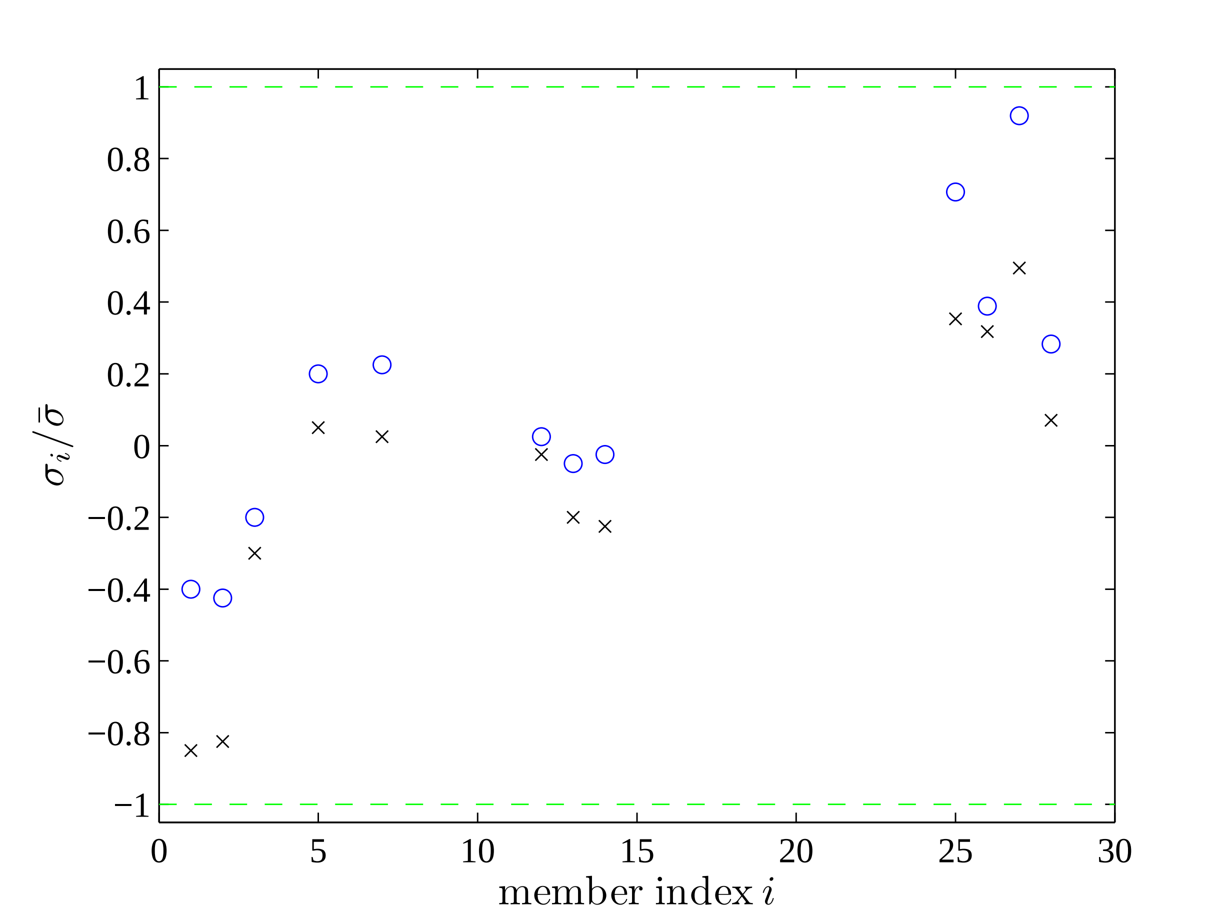
最悪シナリオでの部材応力

Ex.) 29 部材トラス ($\alpha = 1.0$)



robust opt.

$(\mathcal{X} = \{0, 5, 15\}^m)$



最悪シナリオでの部材応力

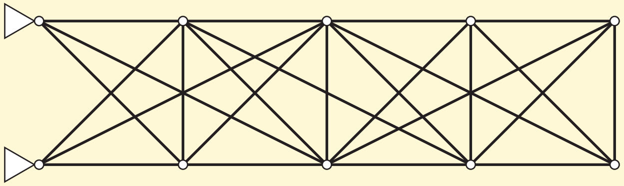
ここまでのまとめ

- 既往の研究
  - 応力や変位の制約
    [Au, Cheng, Tham & Zheng 03] [Doltsinis & Kang 04] [Elishakoff, Haftka & Fang 94] [Jiang, Han & Liu 07] [Lee & Park 01] [Pantelides & Ganzerli 98]
    存在部材（トポロジー）が変化しない
  - コンプライアンス制約　[Ben-Tal & Nemirovski 97]
    存在節点が変化しない
- トポロジーの最適化
  - トポロジーに依存する不確定性集合
    存在節点のみに外力が作用し得る
  - 混合整数計画

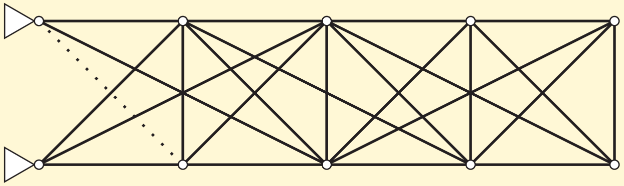
大域的 or 局所的 最適化

- ロバスト構造最適化
  - 大域的な手法　　$\longrightarrow$ 大規模な問題は解き難い
  - 局所的な手法　　$\longrightarrow$ 得られる解が初期解に大きく依存
    - 固有の困難点：荷重などの条件が設計に依存
- 大域性の保証 が ほんとうに欲しい問題 とは...
  - 最悪シナリオ を求める問題

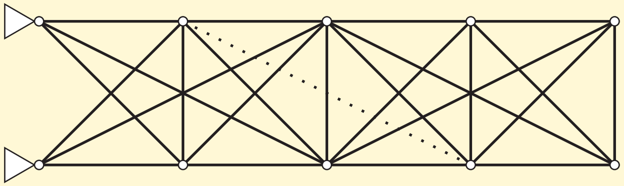
動機：構造物の損傷と冗長性



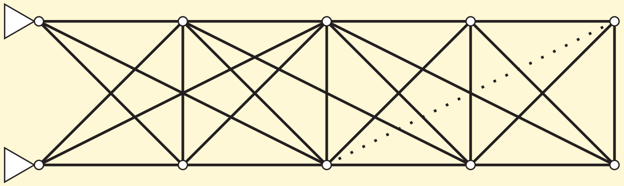
健全な構造物



1 本消失



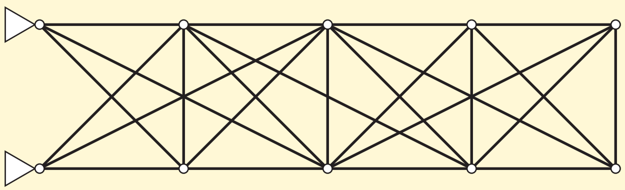
1 本消失



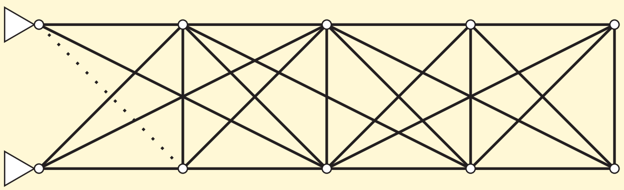
1 本消失

. . .

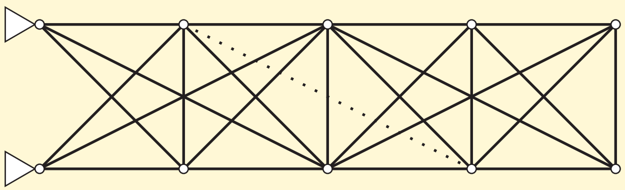
動機：構造物の損傷と冗長性



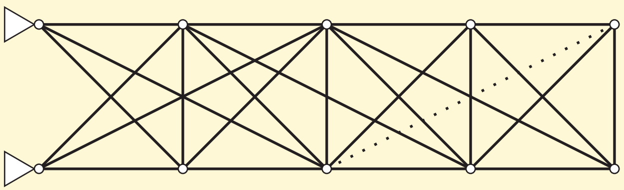
健全な構造物



1 本消失



1 本消失



1 本消失

・・・

- 最悪の損傷のシナリオとは?
  - 「最悪」の意味
  - 「最悪シナリオにおいて制約を満たす」$=$ ロバスト制約
  - 「冗長性」との関連性

動機：冗長性の指標

- 不静定次数 $s = n - \mathrm{rank}\, \boldsymbol{H}$
- strength redundancy factor $r = l_{\mathrm{intact}} / (l_{\mathrm{intact}} - l_{\mathrm{damaged}})$

[Frangopol & Curley 87]

  - l_{intact}：損傷のない構造物の終局耐力
  - l_{damaged}：損傷を被った構造物の終局耐力

動機：冗長性の指標

- 不静定次数 $s = n - \mathrm{rank}\,\boldsymbol{H}$
- strength redundancy factor $r = l_{\mathrm{intact}}/(l_{\mathrm{intact}} - l_{\mathrm{damaged}})$

  [Frangopol & Curley 87]
- sensitivity index $1/r$ [Ohi, Ito & Li 04]
  - 終局耐力 $=$ 塑性崩壊荷重
  - 損傷 $=$ 部材の消失

動機：冗長性の指標

- 不静定次数 $s = n - \mathrm{rank}\, \boldsymbol{H}$
- strength redundancy factor $r = l_{\mathrm{intact}} / (l_{\mathrm{intact}} - l_{\mathrm{damaged}})$
  [Frangopol & Curley 87]
- sensitivity index $1/r$ [Ohi, Ito & Li 04]
- $(P(D) - P(C))/P(C)$ [Fu & Frangopol 90]
  - $P(C)$：構造物全体の崩壊確率
  - $P(D)$：構造要素の損傷確率

動機：冗長性の指標

- 不静定次数 $s = n - \mathrm{rank}\,\boldsymbol{H}$
- strength redundancy factor $r = l_{\mathrm{intact}}/(l_{\mathrm{intact}} - l_{\mathrm{damaged}})$
  [Frangopol & Curley 87]
- sensitivity index $1/r$ [Ohi, Ito & Li 04]
- $(P(D) - P(C))/P(C)$ [Fu & Frangopol 90]
- residual strength index l_i/l_{u} [Feng & Moses 86]
  - l_{u}：構造物の終局強度
  - l_i：構造要素 i が損傷したときの構造物の終局強度

動機：冗長性の指標

- 不静定次数 $s = n - \mathrm{rank}\,\boldsymbol{H}$
- strength redundancy factor $r = l_{\mathrm{intact}}/(l_{\mathrm{intact}} - l_{\mathrm{damaged}})$ [Frangopol & Curley 87]
- sensitivity index $1/r$ [Ohi, Ito & Li 04]
- $(P(D) - P(C))/P(C)$ [Fu & Frangopol 90]
- residual strength index l_i/l_{u} [Feng & Moses 86]
- redundancy-strength index $l_{\mathrm{u}}/l_{\mathrm{y}}$ [Husain & Tsopelas 04]
    - l_{u}：構造物の終局強度
    - l_{y}：“first significant yielding” が生じたときの構造物の強度

動機：冗長性の指標

- 不静定次数 $s = n - \mathrm{rank}\, \boldsymbol{H}$
- strength redundancy factor $r = l_{\mathrm{intact}}/(l_{\mathrm{intact}} - l_{\mathrm{damaged}})$ [Frangopol & Curley 87]
- sensitivity index $1/r$ [Ohi, Ito & Li 04]
- $(P(D) - P(C))/P(C)$ [Fu & Frangopol 90]
- residual strength index l_i/l_{u} [Feng & Moses 86]
- redundancy-strength index $l_{\mathrm{u}}/l_{\mathrm{y}}$ [Husain & Tsopelas 04]
- strong redundancy / weak redundancy [Kanno & Ben-Haim 11]

共通点：構造要素の損傷による性能の低下を考察

$\rightarrow$ 損傷の最悪シナリオは?

塑性崩壊荷重：トラス

- 最悪シナリオ $:=$ 塑性崩壊荷重 が最も低下する損傷シナリオ
- 外力

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{d}} + \lambda \boldsymbol{f}_{\mathrm{r}}$$

  - λ：載荷パラメータ　　$\boldsymbol{f}_{\mathrm{r}}\ (\neq \boldsymbol{0})$：基準荷重　　$\boldsymbol{f}_{\mathrm{d}}$：固定
- 釣合式

$$\sum_{i=1}^{m} q_i \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{f}$$

  - q_i：軸力
- 降伏条件

$$|q_i| \leq q_{\mathrm{y}i} \quad (i = 1, \dots, m)$$

塑性崩壊荷重：トラス

- 不確定性のない場合
- 塑性崩壊荷重 $=$ 次の問題の最適値（上界定理）

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{c}} \quad & -\boldsymbol{f}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{m} q_{\mathrm{y}i} c_i \\ \mathrm{s.\,t.} \quad & \boldsymbol{f}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = 1, \\ & c_i \geq |\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}| \quad (i = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

- 線形計画問題
  - 変数
    - $\boldsymbol{u}$：変位
    - $\boldsymbol{c}$：部材の伸び

部材の損傷のモデル

- 部材の損傷の不確定性モデル
  - たかだか α 本の部材が消失
  - どの部材が損傷するか は 特定しない　　$\leftarrow$ 不確定性
- $\boldsymbol{t} \in \{0,1\}^m$: 部材の 存在／消失 を表す
  - $\tilde{\boldsymbol{t}} = (1, 1, \dots, 1)$: 消失部材のない初期状態
  - $t_i = \begin{cases} 1 & \text{部材 } i \text{ が存在} \\ 0 & \text{部材 } i \text{ が消失} \end{cases}$
- 不確定性集合

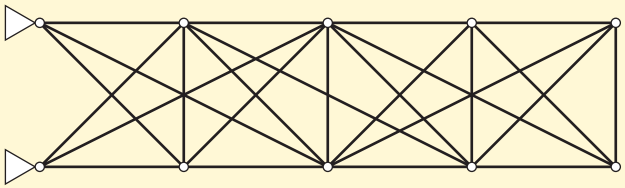
$$\mathcal{U}(\alpha; \tilde{\boldsymbol{t}}) = \left\{ \boldsymbol{t} \in \{0,1\}^m \mid \boldsymbol{t} \le \tilde{\boldsymbol{t}},\ \sum_{i=1}^{m} |\tilde{t}_i - t_i| \le \alpha \right\}$$

損傷の不確定集合の例

- 不確定性集合

$$\mathcal{U}(\alpha;\tilde{\boldsymbol{t}}) = \left\{ \boldsymbol{t} \in \{0,1\}^m \mid \boldsymbol{t} \le \tilde{\boldsymbol{t}},\ \sum_{i=1}^{m} |\tilde{t}_i - t_i| \le \alpha \right\}$$

- 例：$\alpha = 1$



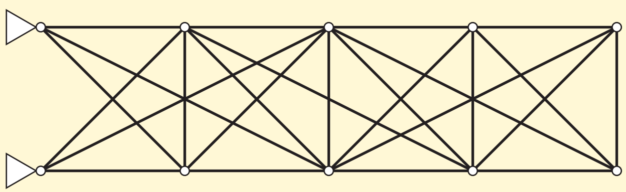
$\tilde{\boldsymbol{t}}$

損傷の不確定集合の例

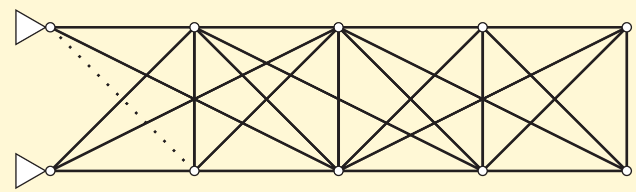
- 不確定性集合

$$\mathcal{U}(\alpha;\tilde{\boldsymbol{t}}) = \left\{ \boldsymbol{t} \in \{0,1\}^m \mid \boldsymbol{t} \le \tilde{\boldsymbol{t}},\ \sum_{i=1}^{m} |\tilde{t}_i - t_i| \le \alpha \right\}$$

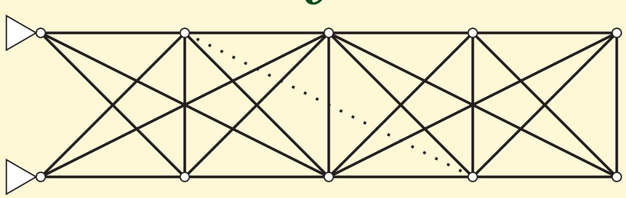
- 例：$\alpha = 1$



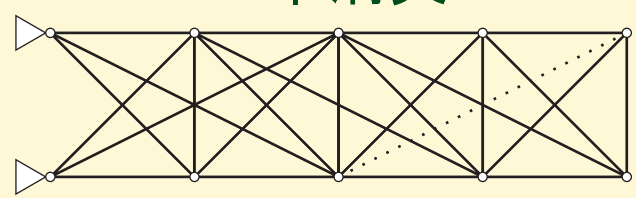
$\tilde{\boldsymbol{t}}$



1 本消失



1 本消失



1 本消失

$\cdots$

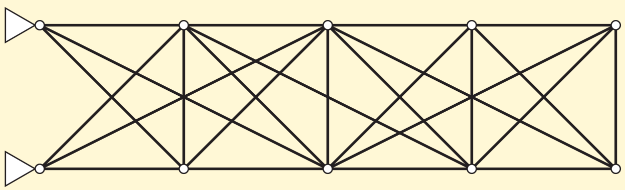
- $\boldsymbol{t} \in \mathcal{U}(\alpha;\tilde{\boldsymbol{t}})$ のうち 応答量が最悪となる $\boldsymbol{t}$ は?

損傷の不確定集合の例

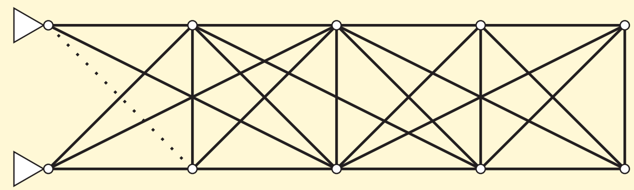
- 不確定性集合

$$\mathcal{U}(\alpha;\tilde{\boldsymbol{t}}) = \left\{ \boldsymbol{t} \in \{0,1\}^m \mid \boldsymbol{t} \le \tilde{\boldsymbol{t}},\ \sum_{i=1}^{m} |\tilde{t}_i - t_i| \le \alpha \right\}$$

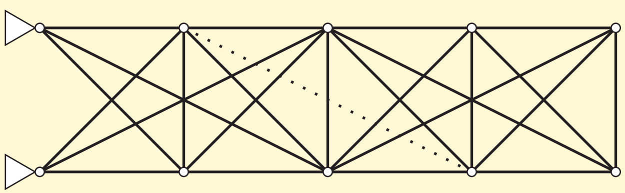
- 例：$\alpha = 2$



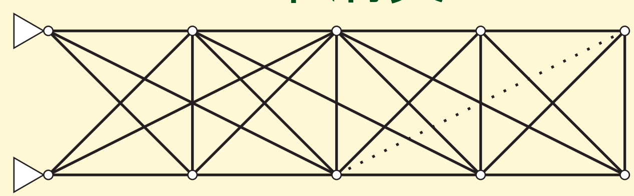
$\tilde{\boldsymbol{t}}$



1 本消失

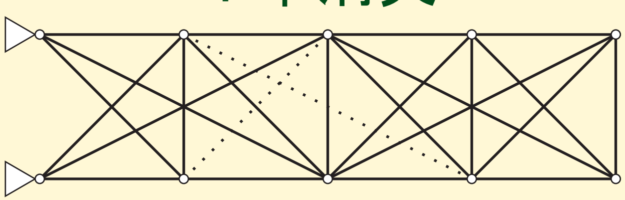


1 本消失

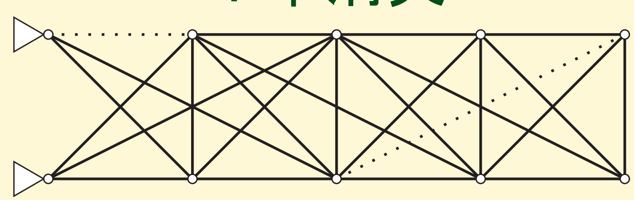


1 本消失

$\cdots$



2 本消失



2 本消失

$\cdots$

損傷の最悪シナリオ

- 不確定性集合 $\mathcal{U}(\alpha;\tilde{\boldsymbol{t}})$
- 塑性崩壊荷重係数 $\lambda(\boldsymbol{t})$ $\leftarrow$ $\boldsymbol{t}$ の関数とみる
- 最悪シナリオの定義

$$\boxed{\boldsymbol{t}^{\mathrm{worst}} = \arg\min\{\lambda(\boldsymbol{t}) \mid t \in \mathcal{U}(\alpha;\tilde{\boldsymbol{t}})\} \qquad (\clubsuit)}$$

損傷の最悪シナリオ

- 不確定性集合 $\mathcal{U}(\alpha; \tilde{\boldsymbol{t}})$
- 塑性崩壊荷重係数 $\lambda(\boldsymbol{t})$ 　　$\leftarrow \boldsymbol{t}$ の関数とみる
- 最悪シナリオの定義

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{worst}} = \arg\min\{\lambda(\boldsymbol{t}) \mid \boldsymbol{t} \in \mathcal{U}(\alpha; \tilde{\boldsymbol{t}})\} \qquad (\clubsuit)$$

- 最適化問題 ($\clubsuit$) を解けばよい
  - 局所最適解 では不十分
  - $\rightarrow$ 混合整数計画問題 (MIP) に帰着
    - 大域的な最適性（= 最悪であること）を保証
      (e.g,, 分枝限定法，切除平面法)

混合整数計画としての定式化

- 上界定理を元に考える
- 部材の消失を考慮すると

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{q}_{\mathrm{y}}} \quad & -\boldsymbol{f}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{m} q_{\mathrm{y}i} c_i \\ \mathrm{s.\,t.} \quad & \boldsymbol{f}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} = 1, \\ & c_i \geq |\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}| \quad (i = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

- $\tilde{q}_{\mathrm{y}i} = \begin{cases} \tilde{q}_{\mathrm{y}i} & \text{部材 } i \text{ が存在} \\ 0 & \text{部材 } i \text{ が消失} \end{cases}$

混合整数計画としての定式化

- 上界定理を元に考える
- 部材の消失を考慮すると

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{q}_{\mathrm{y}}} \quad & -\boldsymbol{f}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{m} q_{\mathrm{y}i} c_i \\ \mathrm{s.\,t.} \quad & \boldsymbol{f}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u} = 1, \\ & c_i \geq |\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}| \quad (i = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

- $\tilde{q}_{\mathrm{y}i} = \begin{cases} \tilde{q}_{\mathrm{y}i} & \text{部材 } i \text{ が存在} \\ 0 & \text{部材 } i \text{ が消失} \end{cases}$
- 次の MIP に等価

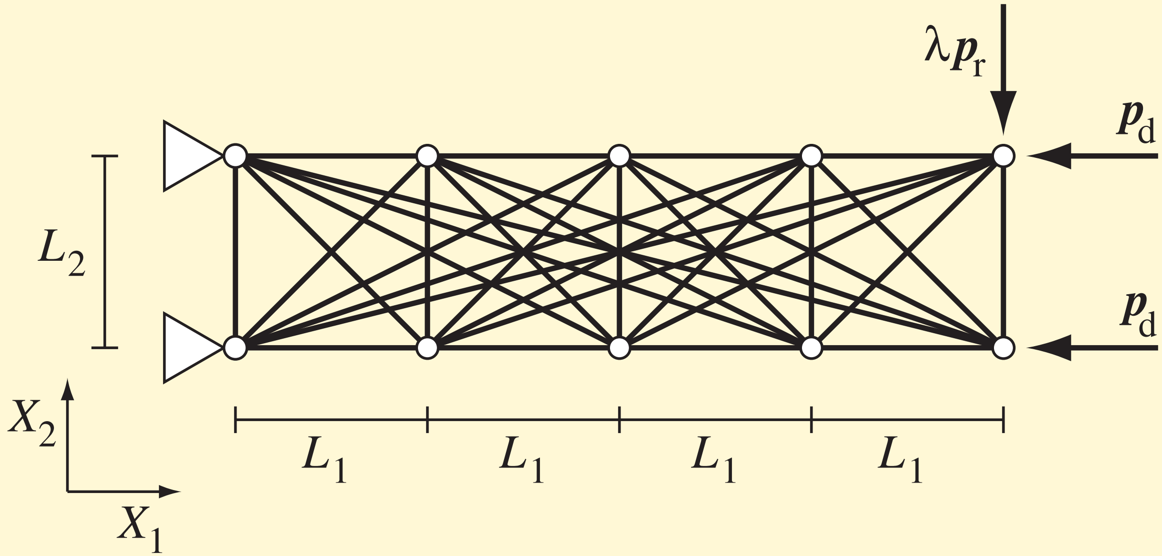
混合整数計画としての定式化

- 最悪シナリオを求める問題：

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{t},\boldsymbol{u},\boldsymbol{c},\boldsymbol{w}} \quad & -\boldsymbol{f}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{m} w_i \\
\mathrm{s.\,t.} \quad & \boldsymbol{f}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = 1, \\
& c_i \geq |\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}|, \\
& -M(1-t_i) \leq w_i - \tilde{q}_{\mathrm{y}i} c_i \leq M(1-t_i), \\
& -Mt_i \leq w_i \leq Mt_i, \\
& \boldsymbol{t} \leq \tilde{\boldsymbol{t}}, \quad \sum_{i=1}^{m} (\tilde{t}_i - t_i) \leq \alpha, \\
& t_i \in \{0,1\}.
\end{aligned}
$$

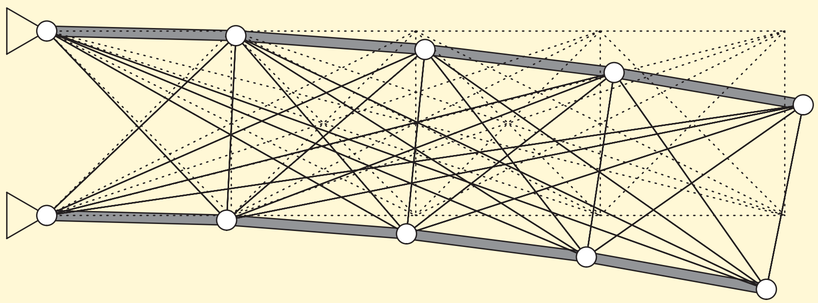
  - $M > 0$：十分大きな定数
  - 整数制約 以外は すべて線形制約

ex.) 32 部材 平面トラス



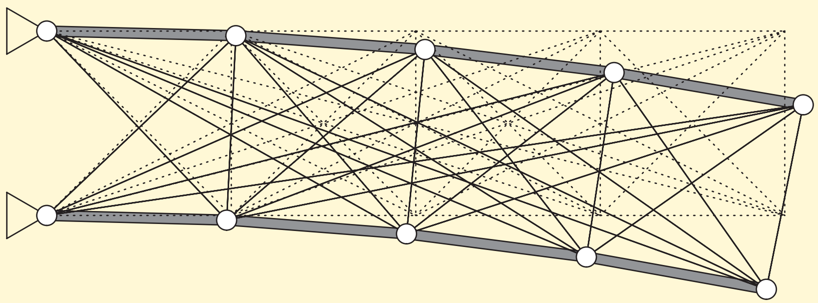
- $f_{\mathrm{r}j} = 1.0 \qquad f_{\mathrm{d}j} = 5.0$

ex.) 32 部材 平面トラス

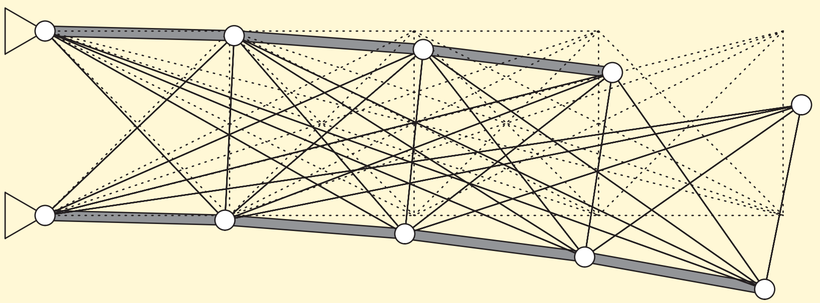


$$\lambda(\tilde{\boldsymbol{t}}) = 10.00$$

ex.) 32 部材 平面トラス

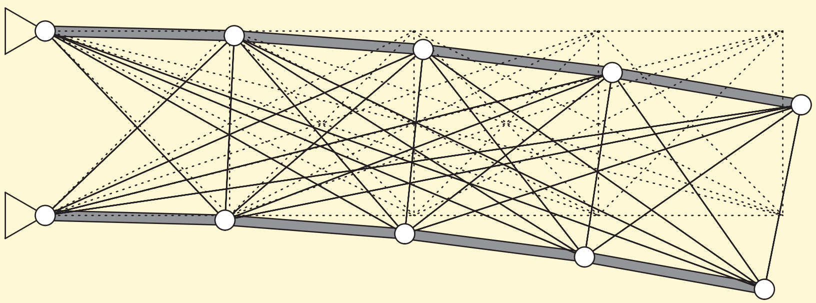


$$\lambda(\tilde{\boldsymbol{t}}) = 10.00$$

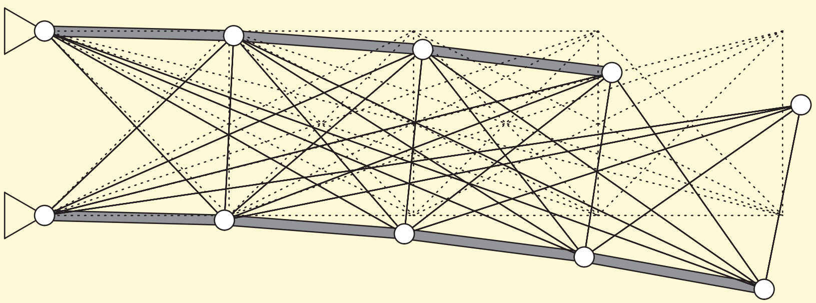


$$\alpha = 1,\ \lambda(\boldsymbol{t}^{\rm worst}) = 8.750$$

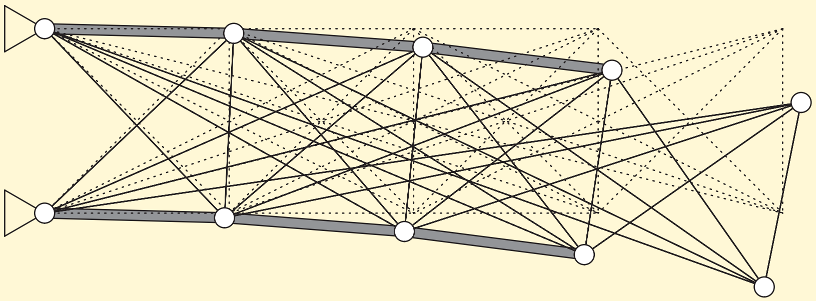
ex.) 32 部材 平面トラス



$$\lambda(\tilde{\boldsymbol{t}}) = 10.00$$

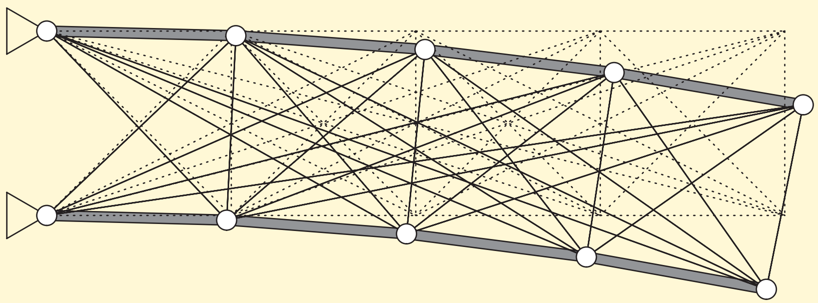


$$\alpha = 1,\ \lambda(\boldsymbol{t}^{\mathrm{worst}}) = 8.750$$

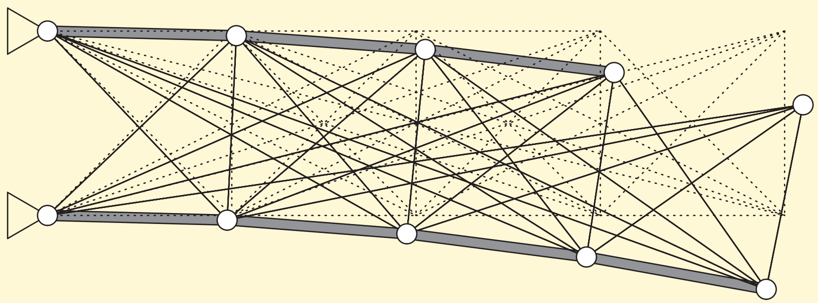


$$\alpha = 2,\ \lambda(\boldsymbol{t}^{\mathrm{worst}}) = 7.500$$

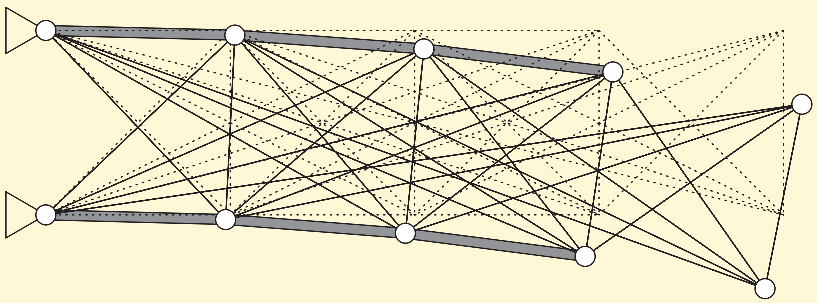
ex.) 32 部材 平面トラス



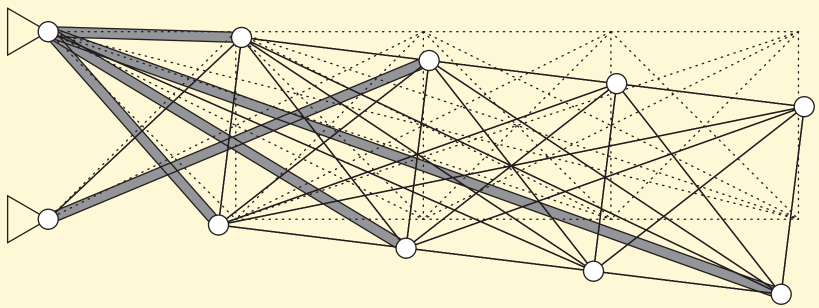
$\lambda(\tilde{\boldsymbol{t}}) = 10.00$



$\alpha = 1,\ \lambda(\boldsymbol{t}^{\mathrm{worst}}) = 8.750$

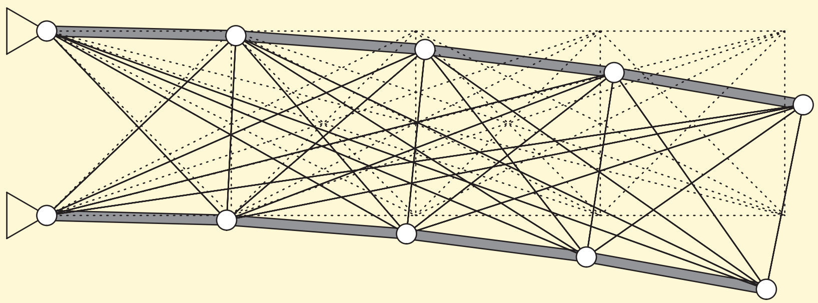


$\alpha = 2,\ \lambda(\boldsymbol{t}^{\mathrm{worst}}) = 7.500$

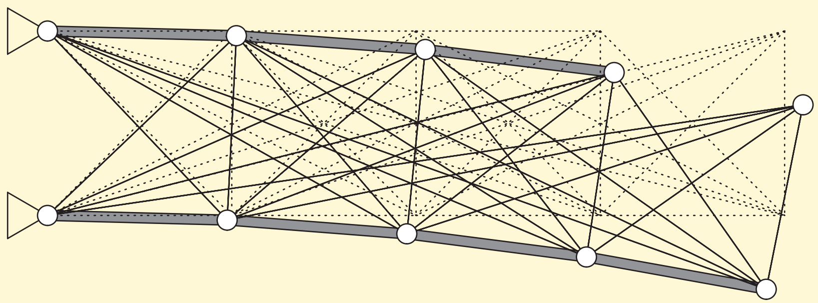


$\alpha = 3,\ \lambda(\boldsymbol{t}^{\mathrm{worst}}) = 6.072$

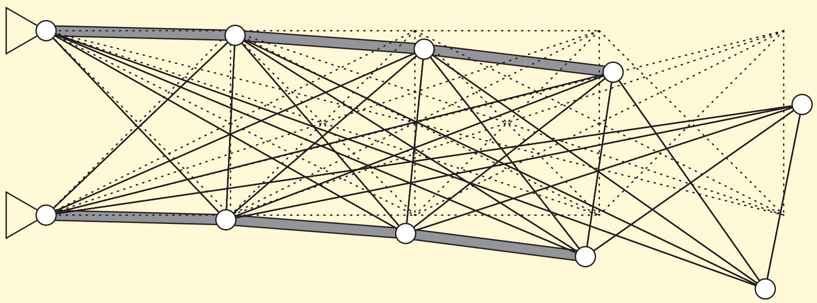
ex.) 32 部材 平面トラス



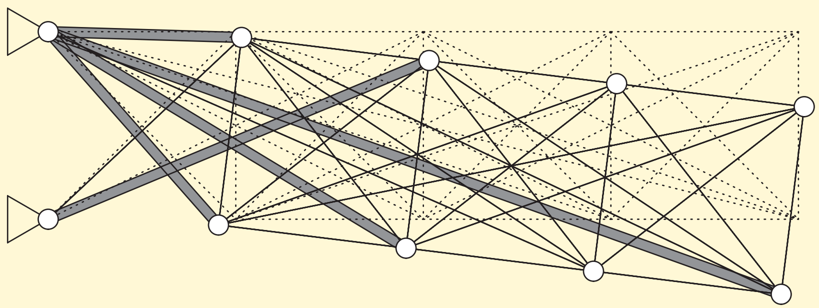
$\lambda(\tilde{\boldsymbol{t}}) = 10.00$



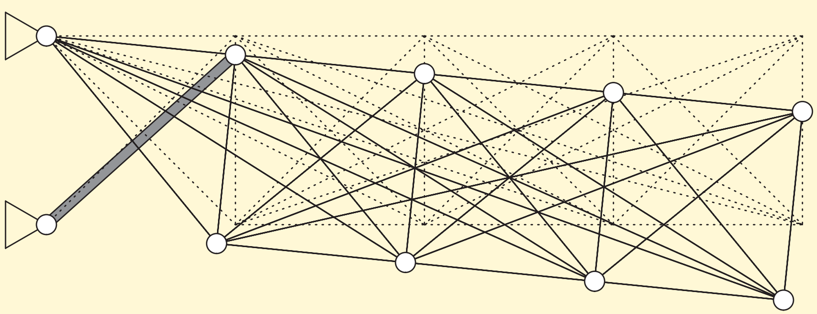
$\alpha = 1,\ \lambda(\boldsymbol{t}^{\mathrm{worst}}) = 8.750$



$\alpha = 2,\ \lambda(\boldsymbol{t}^{\mathrm{worst}}) = 7.500$



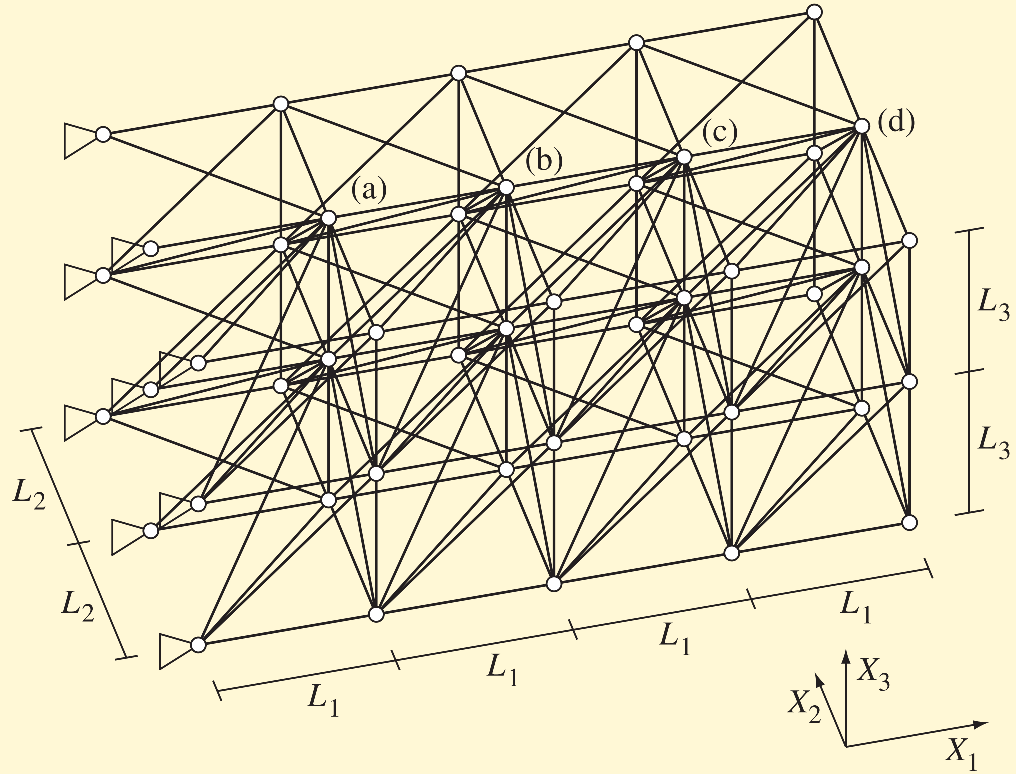
$\alpha = 3,\ \lambda(\boldsymbol{t}^{\mathrm{worst}}) = 6.072$



$\leftarrow \alpha = 4,\ \lambda(\boldsymbol{t}^{\mathrm{worst}}) = 2.286$

$\binom{32}{4} = 35960$ 通り

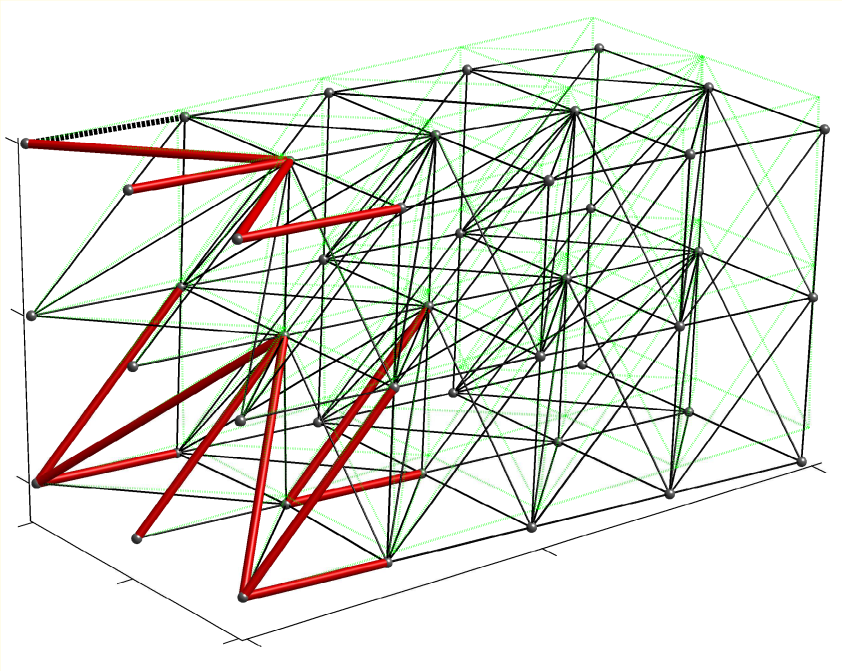
ex.) 立体トラス



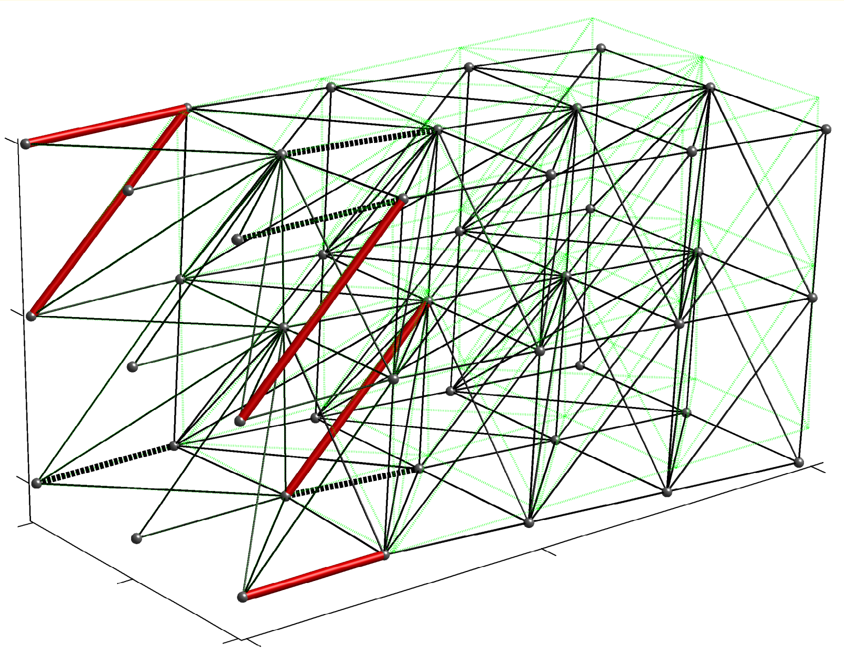
$$\lambda(\tilde{\boldsymbol{t}}) = 140.71$$

- $\boldsymbol{f}_{\mathrm{r}j}$: 節点 (a)–(d) $\qquad \boldsymbol{f}_{\mathrm{d}} = 0$

ex.) 立体トラス



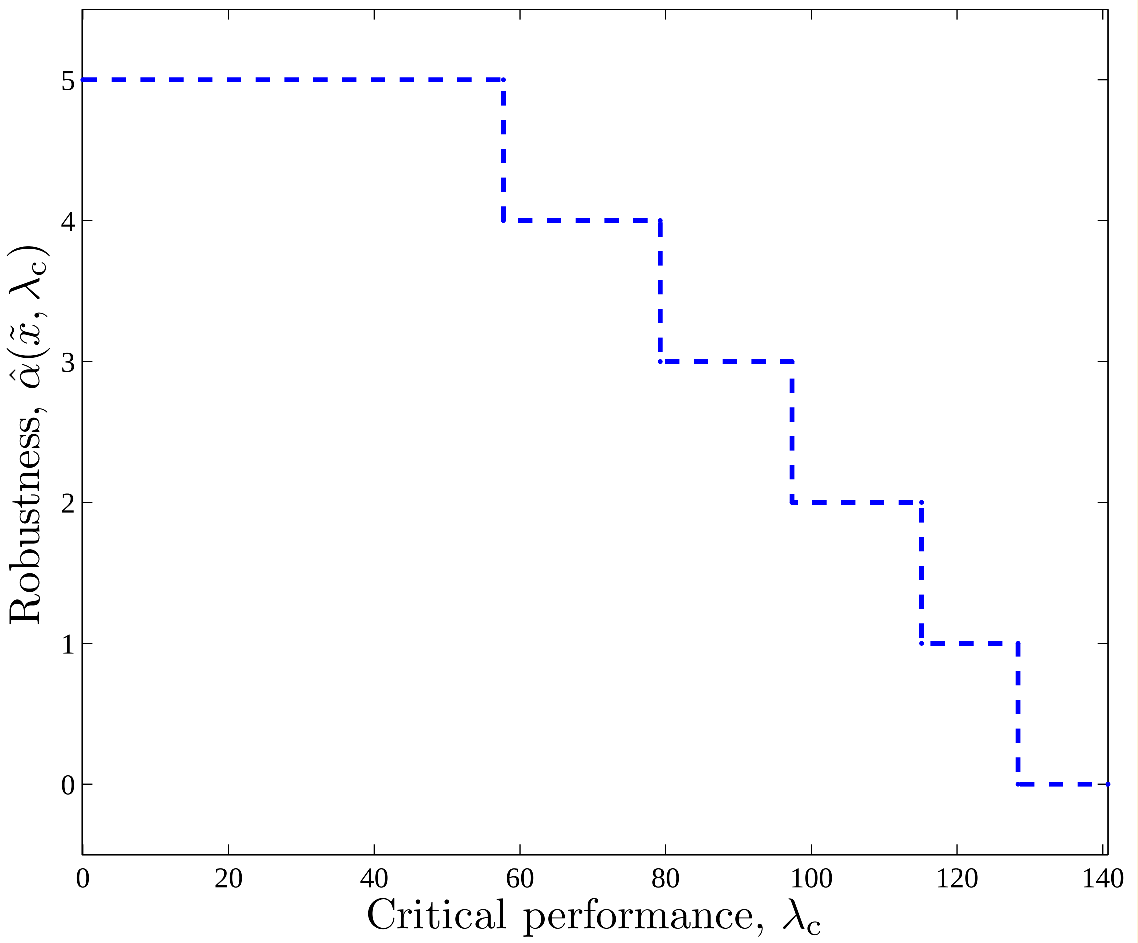
$\alpha = 1,\ \lambda(\boldsymbol{t}^{\mathrm{worst}}) = 128.36$



$\alpha = 4,\ \lambda(\boldsymbol{t}^{\mathrm{worst}}) = 79.26$

ex.) 立体トラス

- 冗長性 と 要求性能 の トレードオフ



まとめ

- 構造物のロバスト最適化
  - 確率論的なモデル $\longrightarrow$ 信頼性設計
  - 非確率論的なモデル—統計的な情報が十分に得られない場合
- 非確率論的なロバスト最適化
  - ロバスト制約：最悪のシナリオで制約を満たす
  - トポロジーの最適化 $\longrightarrow$ 不確定性が設計に依存
  - 半正定値計画 や 整数計画 の活用
  - 最悪シナリオを求める問題 $\longleftarrow$ 大域的最適性が重要