ロバスト性と冗長性の定量的評価法

寒野 善博

June 18, 2013

建築構造設計における冗長性とロバスト性シンポジウム

ロバスト性と冗長性の定量的評価法

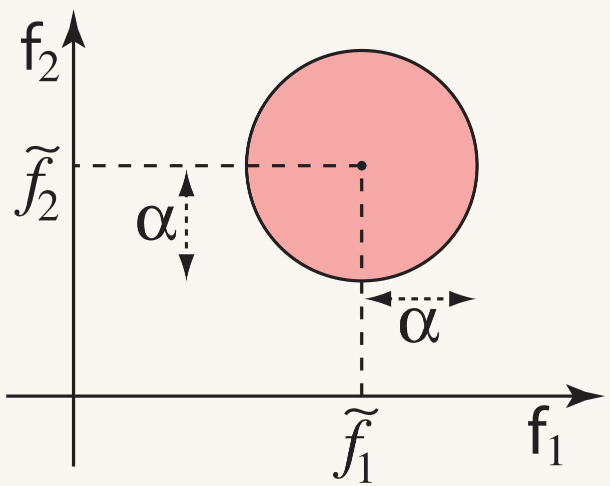
- 4 章 の内容
  - ロバスト性の評価法
    - 不確定性：外力，剛性，節点位置, etc.
    - 制約に関するロバスト性
    - 「ばらつきに対する抵抗性」[3 章]
    - インフォ・ギャップ理論 [Ben-Haim 01, 06]
  - 冗長性の評価法
    - 不確定性：部材の損傷
    - 制約に関する冗長性
  - ロバスト最適設計法
    - ロバスト制約：入力がばらついても 制約を満たす

不確定性モデル

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \mathsf{f} \qquad \text{(釣合式)}$$

外力のみが不確定（簡単のため）:

$$\mathsf{f}_j = \tilde{f}_j + \zeta_j, \quad \alpha \geq \|\zeta\| \qquad (\clubsuit)$$



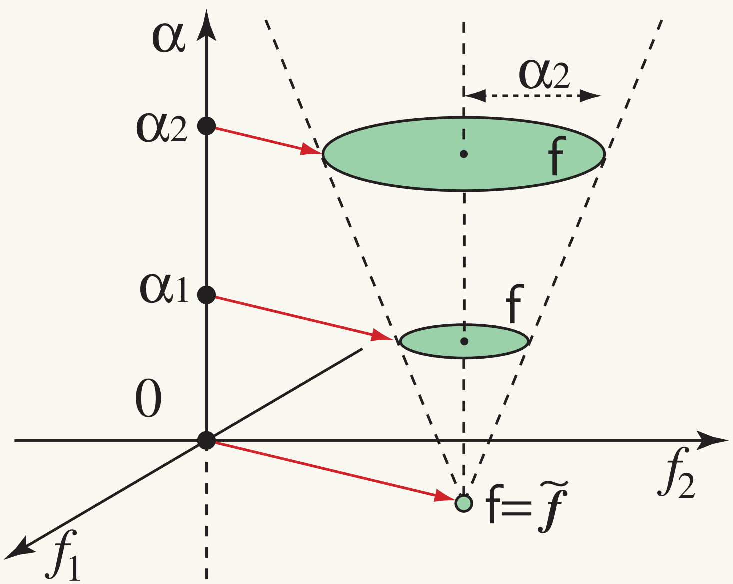
α を固定したとき

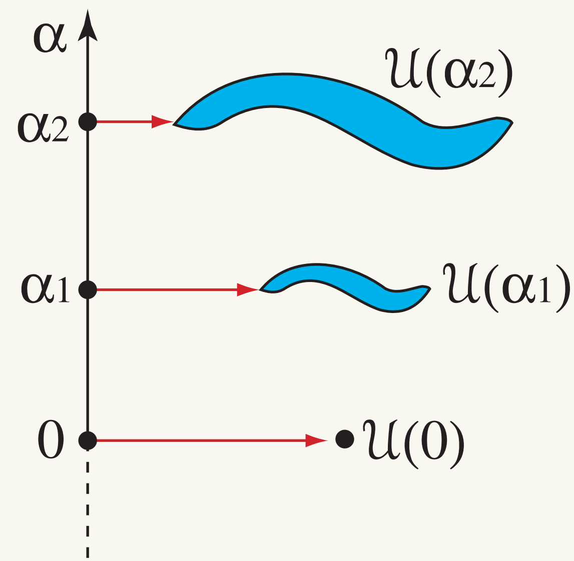
不確定性モデル

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \mathsf{f} \qquad \text{(釣合式)}$$

外力のみが不確定（簡単のため）:

$$\mathsf{f}_j = \tilde{f}_j + \zeta_j, \quad \alpha \geq \|\zeta\| \qquad (\clubsuit)$$





集合 $\mathcal{U}(\alpha)$：釣合式と (♣) の解

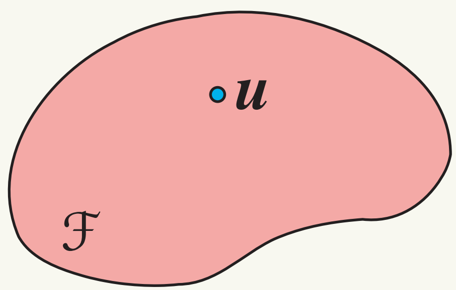
ロバスト制約

- 通常の制約

$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}, \quad \boldsymbol{u}\text{は釣合式の解}$$

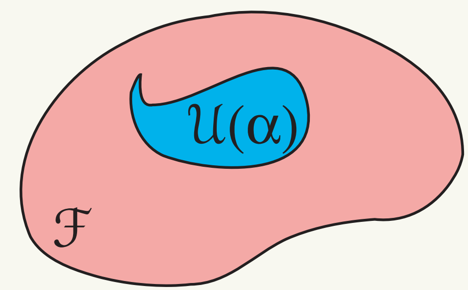
- ロバスト制約　[9 章でも]

$$\mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$$



$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}$$

（外力は固定）$\Rightarrow$
（釣合式の解は一意）

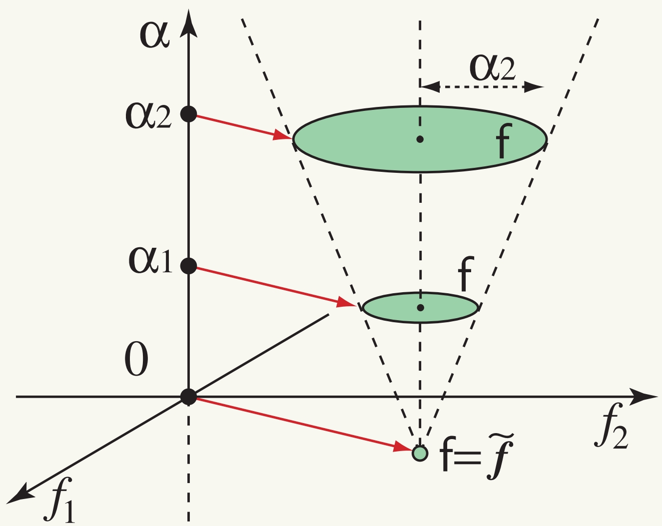


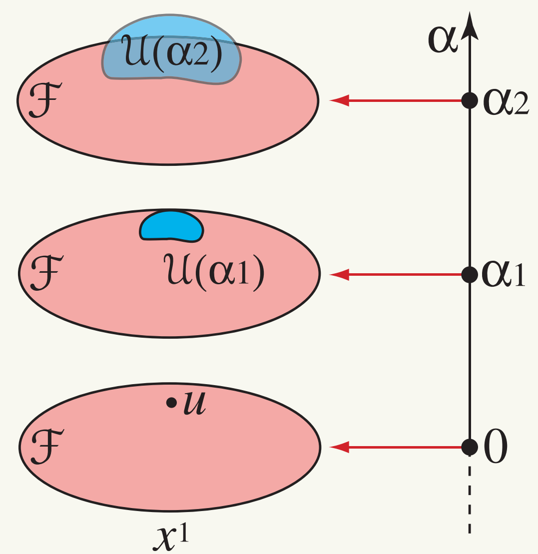
$$\boldsymbol{u} \in \mathcal{F} \ (\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}(\alpha))$$

（外力は不確定）$\rightarrow$
（すべての外力に対して
制約を考慮）

ロバスト性関数 $\hat{\alpha}$

ロバスト制約	$\mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$	(♠)

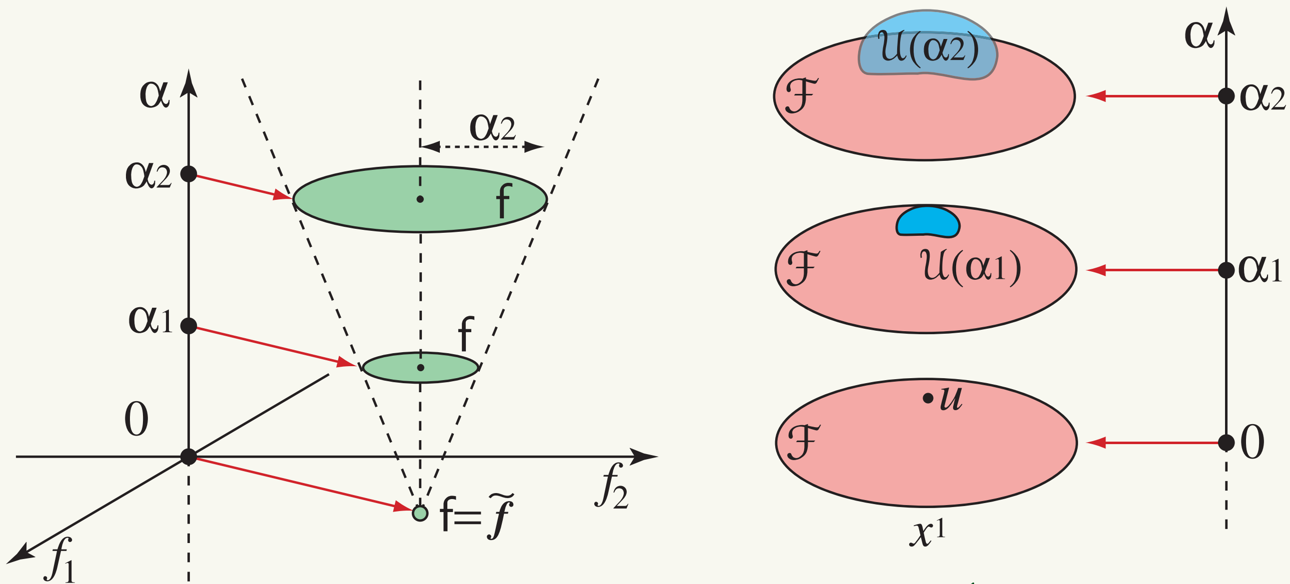




- 二つの設計解 $\boldsymbol{x}^1$ vs. $\boldsymbol{x}^2$

ロバスト性関数 $\hat{\alpha}$

ロバスト制約	$\mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$	(♠)



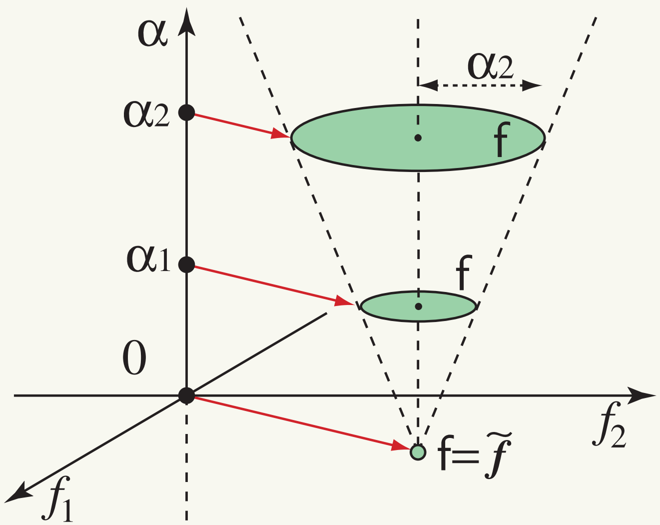
$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{x}^1) = \alpha_1$$

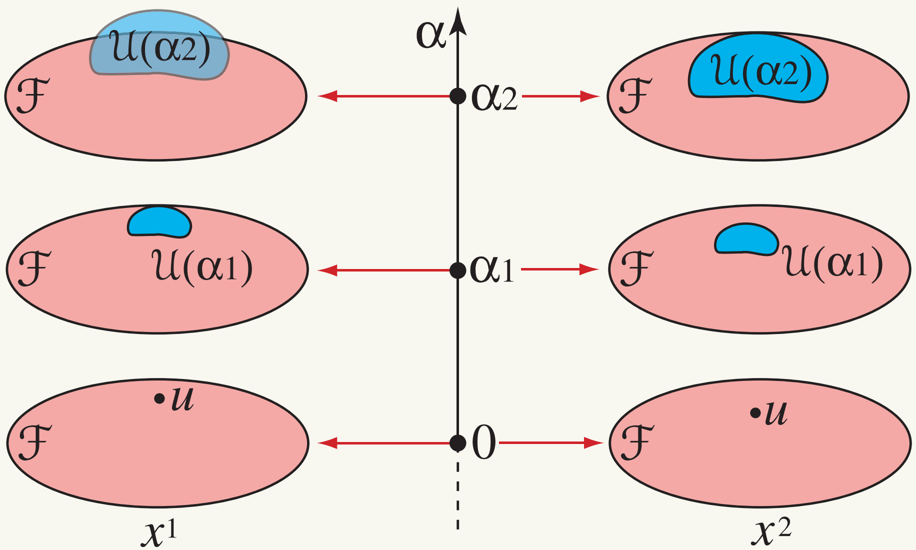
- $\hat{\alpha}$ の定義は

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \max_{\alpha}\{\alpha \mid (♠)\}$$

ロバスト性関数 $\hat{\alpha}$

$$\text{ロバスト制約} \qquad \mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F} \qquad (\spadesuit)$$





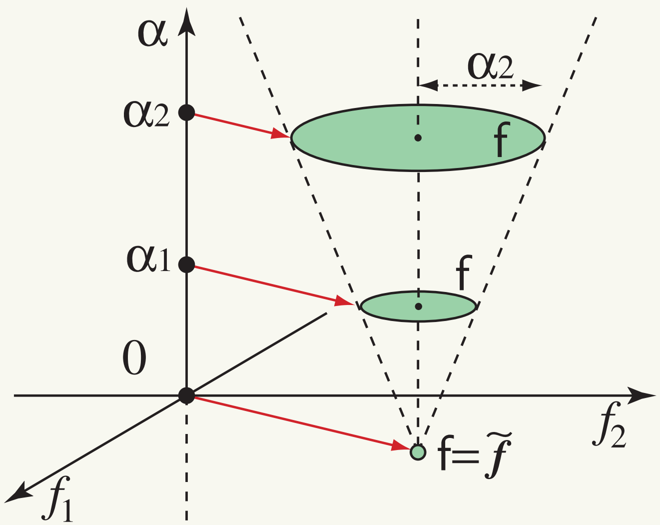
$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{x}^1) = \alpha_1 \qquad \hat{\alpha}(\boldsymbol{x}^2) = \alpha_2$$

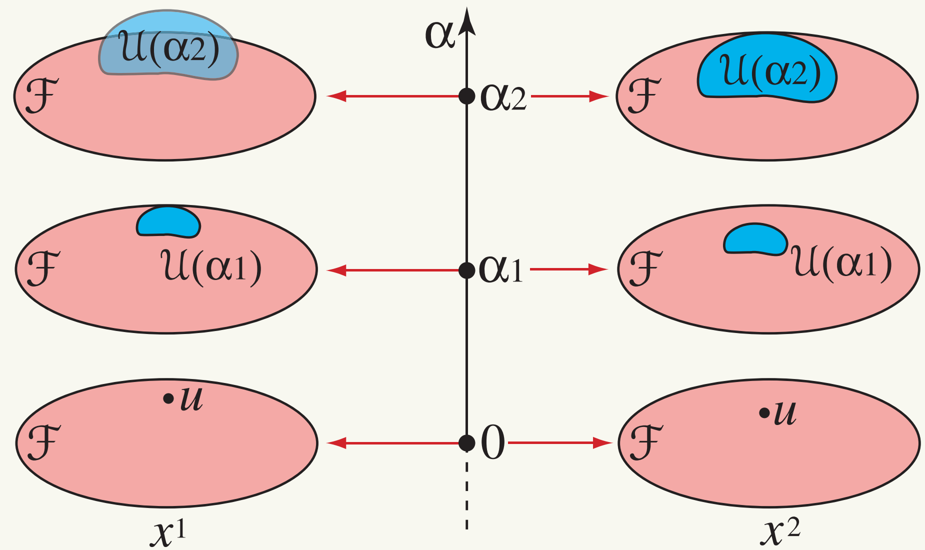
- $\hat{\alpha}$ の定義は

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \max_{\alpha}\{\alpha \mid (\spadesuit)\}$$

ロバスト性関数 $\hat{\alpha}$

ロバスト制約 $\mathcal{U}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$ (♠)

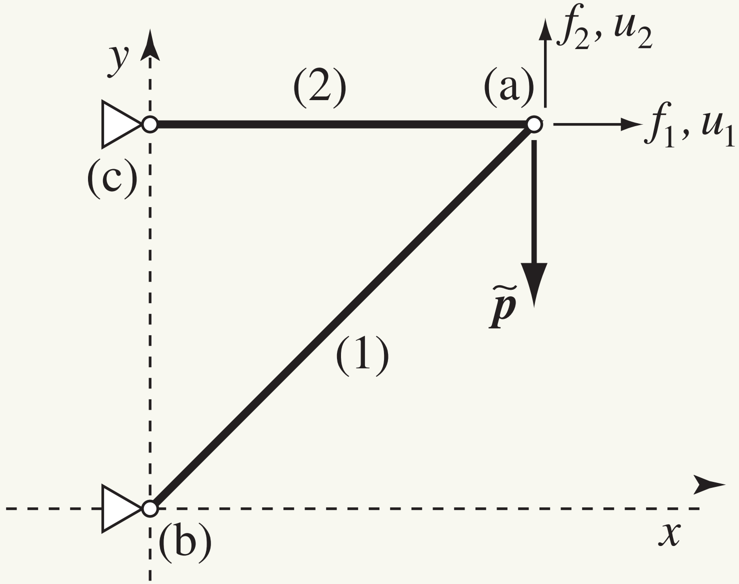




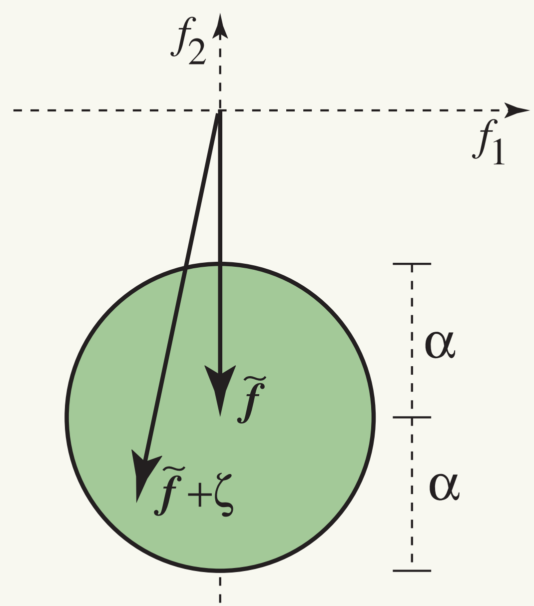
$\hat{\alpha}(\boldsymbol{x}^1) = \alpha_1$ $\hat{\alpha}(\boldsymbol{x}^2) = \alpha_2$

- $\hat{\alpha}(\boldsymbol{x}^1) < \hat{\alpha}(\boldsymbol{x}^2)$ なので，ロバスト性は $\boldsymbol{x}^1 \prec \boldsymbol{x}^2$
- $\hat{\alpha}$ の値が大きいほど，ロバスト性が高い

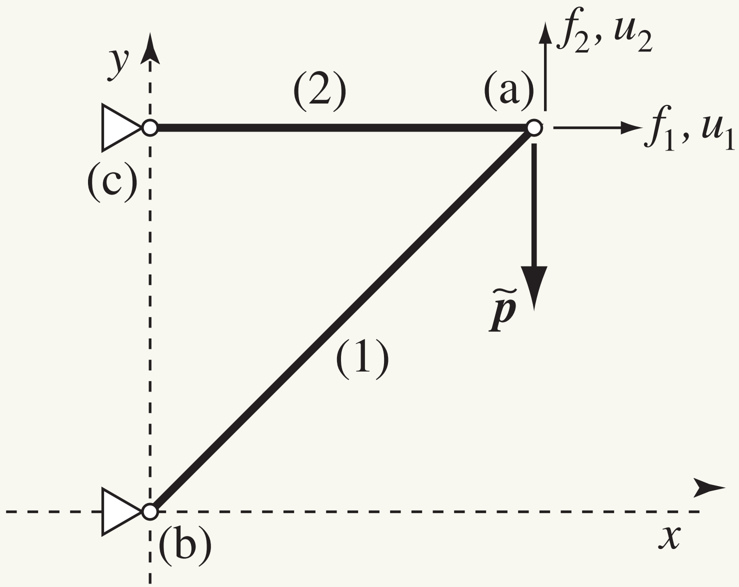
ロバスト性関数の比較



	断面積 (cm^2)	体積 (cm^3)
設計 (A)	$(30, 30)$	7242.6
設計 (B)	$(50, 15)$	8571.1



ロバスト性関数の比較



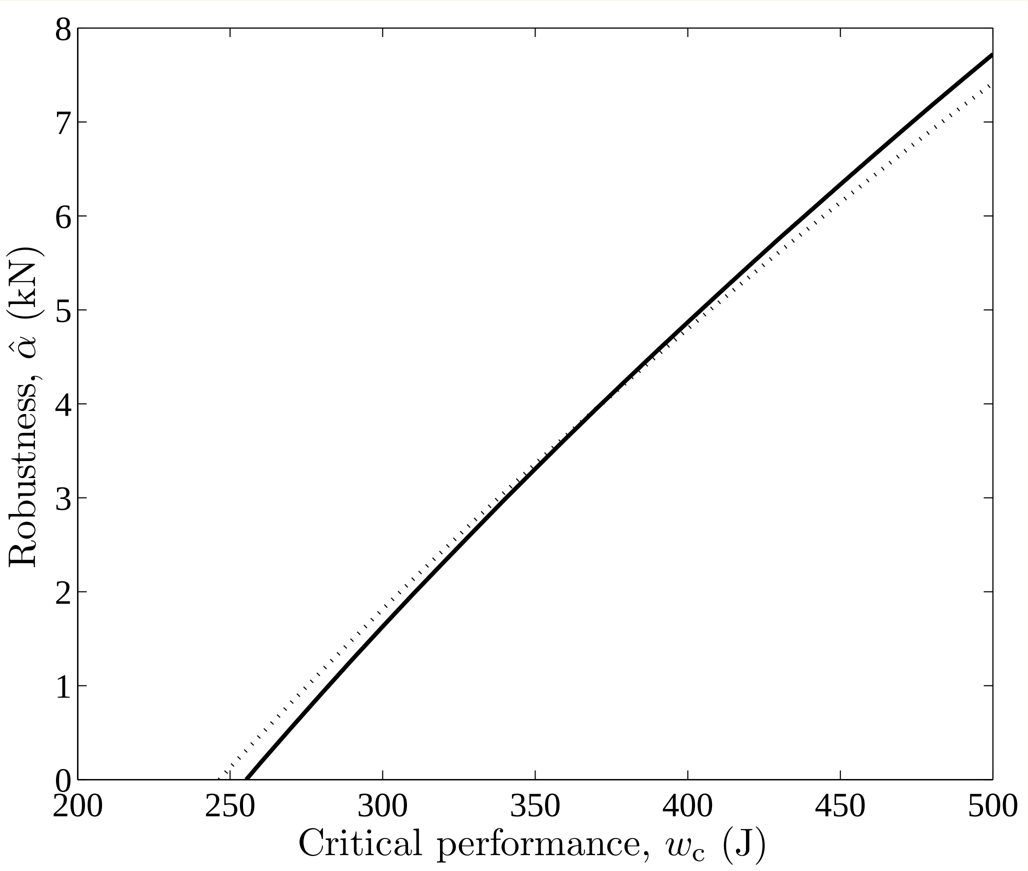
	断面積 (cm^2)	体積 (cm^3)
設計 (A)	$(30, 30)$	7242.6
設計 (B)	$(50, 15)$	8571.1

- (A) と (B) で よりロバスト性が高いのは?

コンプライアンス（外力仕事）を制約に選ぶと ···

[寒野 ’12]

ロバスト性関数 $\hat{\alpha}$ vs. 性能（コンプライアンス）



"——" : 設計 (A)
"……" : 設計 (B)

- 制約は (コンプライアンス) $\leq w_c$
  - w_c が小 $\rightarrow$ ロバスト性 (A) $\prec$ (B)
  - w_c が大 $\rightarrow$ ロバスト性 (A) $\succ$ (B)

ここまでのまとめ

- 非確率論的な不確定性のモデル
  - 統計的なデータが十分にない場合
  - ロバスト制約：
    すべての場合に（= 最悪の場合にも）制約を満たす
- ロバスト性の指標
  - 不確定性のレベル（大きさ）α
  - ロバスト性関数：
    ロバスト制約が満たされる最大の α
- ロバスト性の比較
  - 制約を課す性能として何を選ぶか に依存
  - 性能の許容値の大きさ に依存
  - 不確定性のモデルの定義 に依存

構造物の冗長性の指標

- 不静定次数 $s = n - \mathrm{rank}\, H$ [1 章]

構造物の冗長性の指標

- 不静定次数 $s = n - \mathrm{rank}\, H$ [1 章]
- strength redundancy factor $r = l_{\mathrm{intact}} / (l_{\mathrm{intact}} - l_{\mathrm{damaged}})$ [Frangopol & Curley 87]
  - l_{intact} : 損傷 前 の構造物の 終局耐力
  - l_{damaged} : 損傷 後 の構造物の 終局耐力
- sensitivity index $1/r$ [Ohi, Ito & Li 04], [5 章]
  - 終局耐力 $=$ 塑性崩壊荷重
  - 損傷 $=$ 部材の消失

構造物の冗長性の指標

- 不静定次数 $s = n - \operatorname{rank} H$ [1 章]
- strength redundancy factor $r = l_{\mathrm{intact}}/(l_{\mathrm{intact}} - l_{\mathrm{damaged}})$ [Frangopol & Curley 87]
- sensitivity index $1/r$ [Ohi, Ito & Li 04], [5 章]
- $(P(D) - P(C))/P(C)$ [Fu & Frangopol 90]
  - $P(C)$：構造物 <u>全体</u> の崩壊確率
  - $P(D)$：構造 <u>要素</u> の損傷確率

構造物の冗長性の指標

- 不静定次数 $s = n - \operatorname{rank} H$ [1 章]
- strength redundancy factor $r = l_{\mathrm{intact}}/(l_{\mathrm{intact}} - l_{\mathrm{damaged}})$
[Frangopol & Curley 87]
- sensitivity index $1/r$ [Ohi, Ito & Li 04], [5 章]
- $(P(D) - P(C))/P(C)$ [Fu & Frangopol 90]
- residual strength index l_i/l_{u} [Feng & Moses 86]
  - l_{u} : 終局強度
  - l_i : 構造要素 i が損傷した後の終局強度

構造物の冗長性の指標

- 不静定次数 $s = n - \operatorname{rank} H$ [1 章]
- strength redundancy factor $r = l_{\rm intact}/(l_{\rm intact} - l_{\rm damaged})$ [Frangopol & Curley 87]
- sensitivity index $1/r$ [Ohi, Ito & Li 04], [5 章]
- $(P(D) - P(C))/P(C)$ [Fu & Frangopol 90]
- residual strength index $l_i/l_{\rm u}$ [Feng & Moses 86]
- 損傷後の架構の維持 [3 章]
  - ある部材の破損が生じても，
    隣接する部材が架構を維持できる設計は，冗長性が高い設計

構造物の冗長性の指標

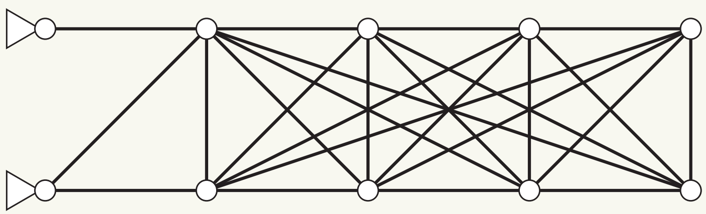
- 不静定次数 $s = n - \operatorname{rank} H$ [1 章]
- strength redundancy factor $r = l_{\text{intact}}/(l_{\text{intact}} - l_{\text{damaged}})$ [Frangopol & Curley 87]
- sensitivity index $1/r$ [Ohi, Ito & Li 04], [5 章]
- $(P(D) - P(C))/P(C)$ [Fu & Frangopol 90]
- residual strength index l_i/l_{u} [Feng & Moses 86]
- 損傷後の架構の維持 [3 章]
- strong redundancy [Kanno & Ben-Haim 11]
  - 性能制約の下で許容される損傷のレベルの最大値 を 指標とする

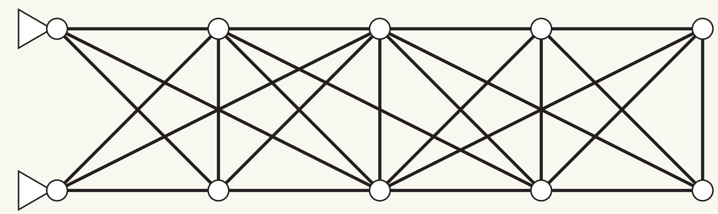
冗長性 大 $=$ いくつかの構造要素が損傷しても 性能の低下が小さい

$\rightarrow$ 最悪の損傷シナリオ と 密接な関係

冗長性の評価 と 最悪シナリオ

- strong redundancy [Kanno & Ben-Haim 11]
- (A) と (B) で より冗長性が高いのは?

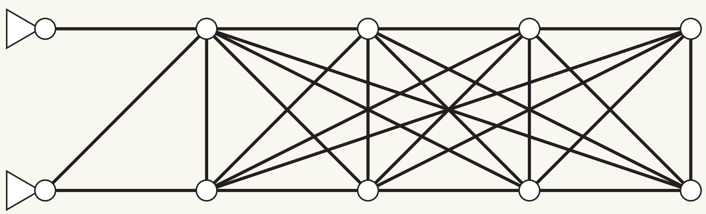
(A) 

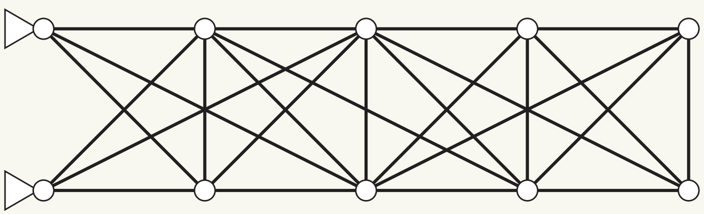
(B) 

- 部材数 $= 25$
- 不静定次数 $= 9$

冗長性の評価 と 最悪シナリオ

- strong redundancy　[Kanno & Ben-Haim 11]
- (A) と (B) で より冗長性が高いのは?

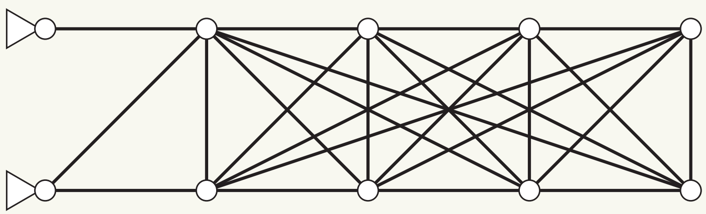
(A) 

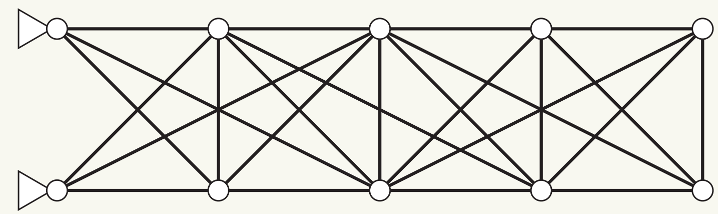
(B) 

- 性能制約の下で，許容される損傷のレベルを比較する.
- 安定性を性能制約とすると，(A) $\prec$ (B) である.
  $\leftarrow$ 部材がどれだけ消失しても，安定性をたもてるか?

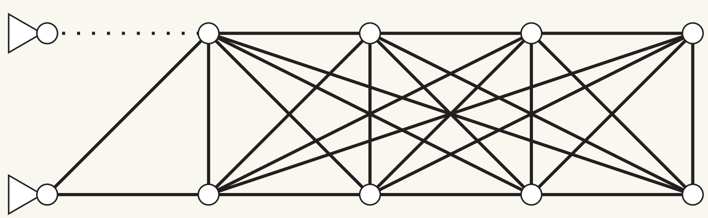
冗長性の評価 と 最悪シナリオ

- strong redundancy [Kanno & Ben-Haim 11]
- (A) と (B) で より冗長性が高いのは?

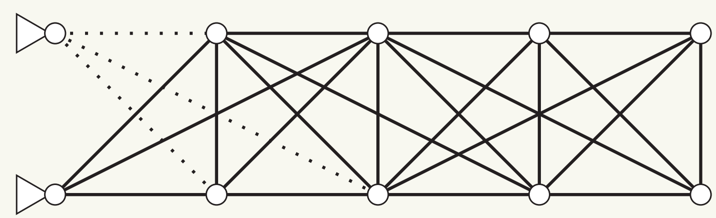
(A)


(B)


  - 性能制約の下で，許容される損傷のレベルを比較する.
  - 安定性を性能制約とすると，(A) $\prec$ (B) である.

(A′)


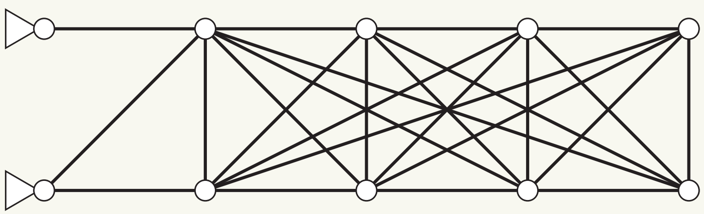
strong redundancy $= 0$

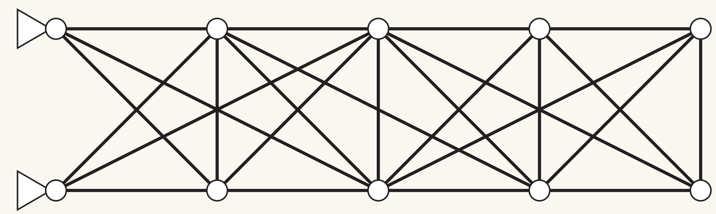
(B′)


strong redundancy $= 2$

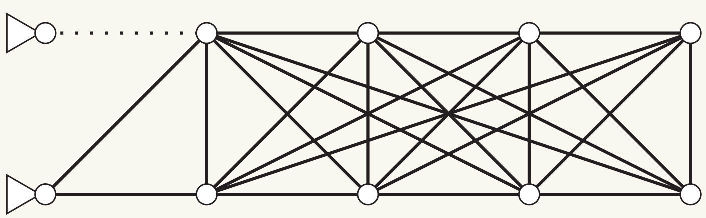
冗長性の評価 と 最悪シナリオ

- strong redundancy　[Kanno & Ben-Haim 11]
- (A) と (B) で より冗長性が高いのは?

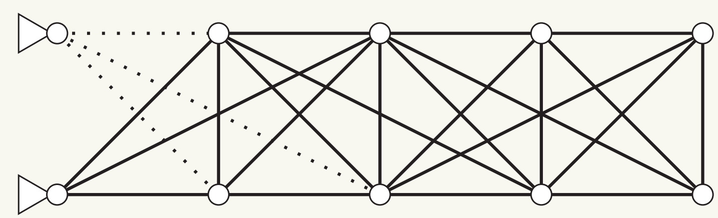
(A) 

(B) 

- 性能制約の下で，許容される損傷のレベルを比較する.
- 安定性を性能制約とすると，(A) $\prec$ (B) である.

(A′) 

strong redundancy $= 0$

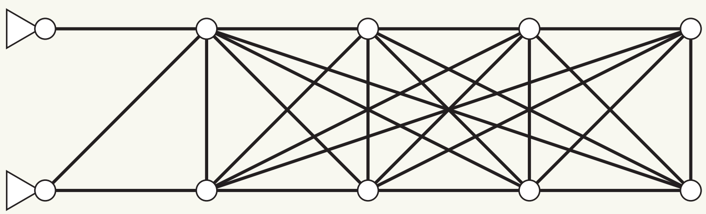
(B′) 

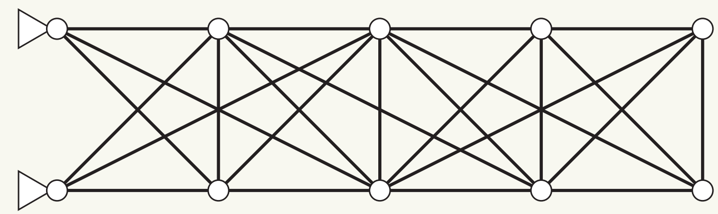
strong redundancy $= 2$

- 冗長性は 損傷の最悪シナリオと関係
- “最悪” の意味（定義）は 性能制約に依存

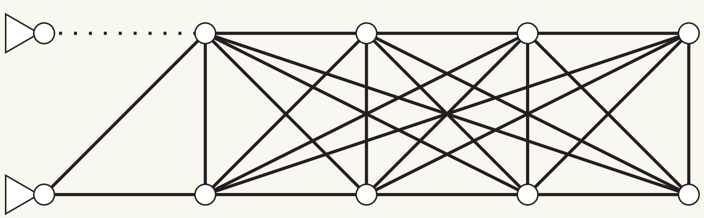
冗長性の評価 と 最悪シナリオ

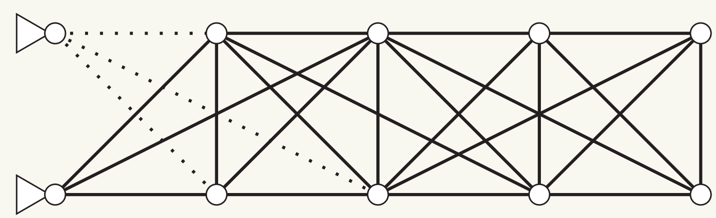
- strong redundancy [Kanno & Ben-Haim 11]
- (A) と (B) で より冗長性が高いのは?


(A)


(B)

- 性能制約の下で，許容される損傷のレベルを比較する.
- 安定性を性能制約とすると，(A) $\prec$ (B) である.


(A′)
strong redundancy $= 0$


(B′)
strong redundancy $= 2$

- 「余剰強度が大きい構造物であっても，構造要素の損傷の生じ方によっては，冗長性を発揮できない」[7 章]

冗長性の指標の一般化

- t：損傷シナリオ　　　　　α：損傷部材の数
  $\tilde{t}$：損傷なしの構造物
- $D(\alpha)$：たかだか α 本が損傷したシナリオ t の集合
- 性能制約

$$\boxed{g(t) \leq g_{\mathrm{c}}}$$

冗長性の指標の一般化

- t : 損傷シナリオ　　　　　α : 損傷部材の数
  $\tilde{t}$: 損傷なしの構造物
- $D(\alpha)$: たかだか α 本が損傷したシナリオ t の集合
- 性能制約

$$\boxed{g(t) \le g_{\mathrm{c}}}$$

- 最悪シナリオにおける制約

$$\boxed{\max_{t \in D(\alpha)} g(t) \le g_{\mathrm{c}}}$$

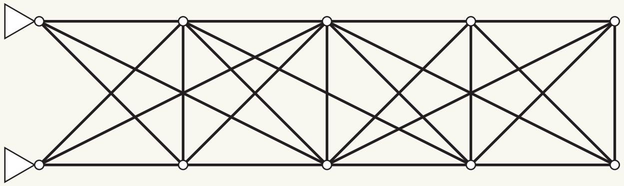
- 冗長性の指標

$$\boxed{\rho(\tilde{t}, g_{\mathrm{c}}) = \max_{\alpha} \left\{ \alpha \mid \max_{t \in D(\alpha)} g(t) \le g_{\mathrm{c}} \right\}}$$

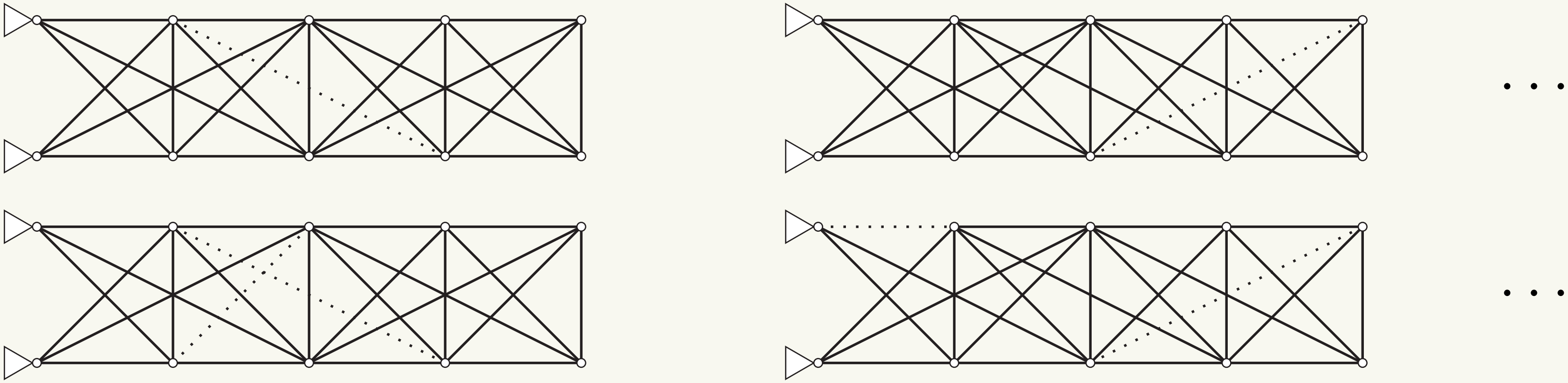
[Kanno & Ben-Haim 11]

最悪の損傷シナリオ

- 損傷前の構造物：

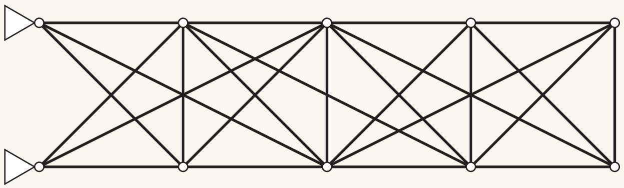


- 損傷シナリオ：

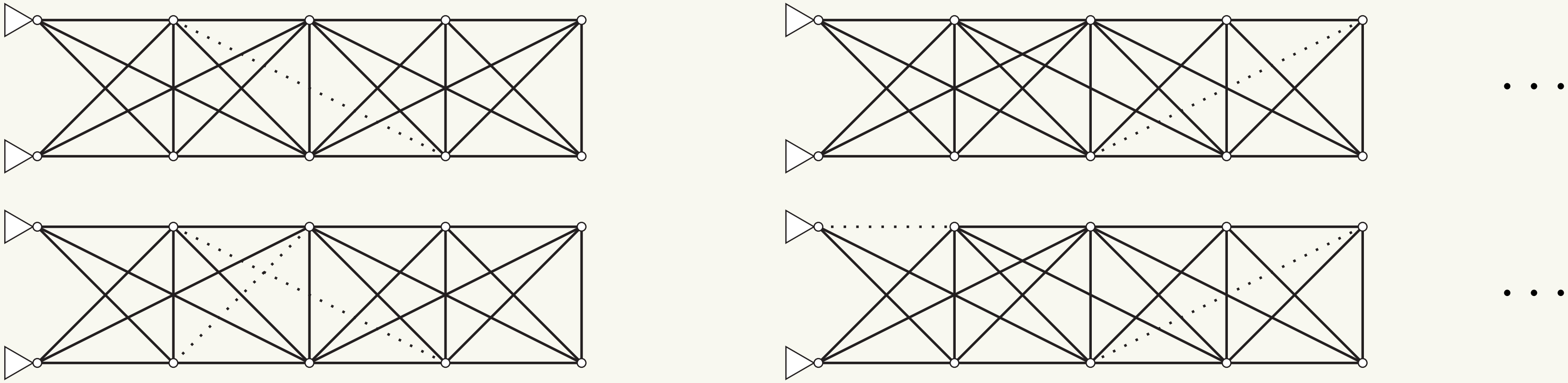


最悪の損傷シナリオ

- 損傷前の構造物：

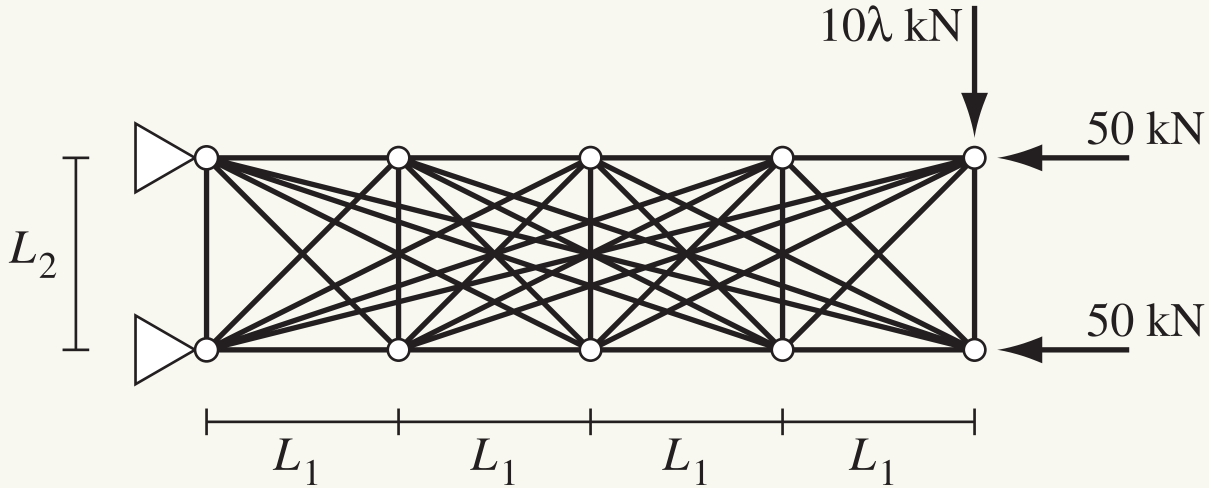


- 損傷シナリオ：



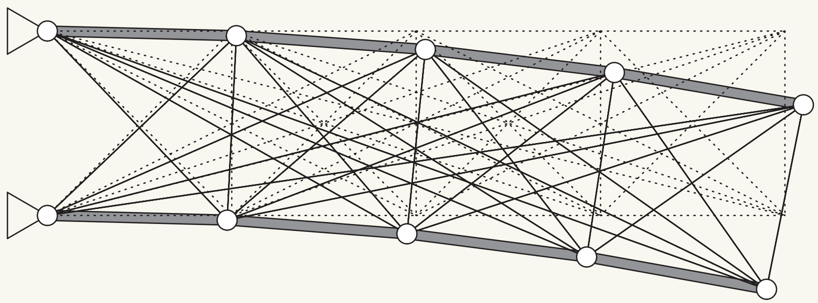
- 構造物の性能が最も低下するシナリオは?
  - 損傷部材の数 α を指定，損傷箇所は不確定
- 性能として 崩壊荷重係数 λ を考える（$\rightarrow$ 5 章 と関連）

最悪シナリオの例



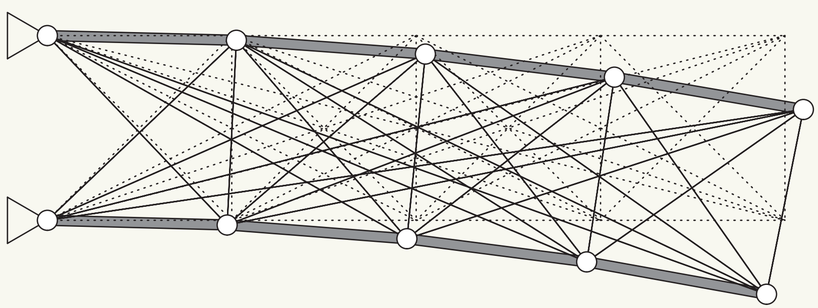
- 塑性崩壊荷重係数の最悪値は? [Kanno '12]
- $q_{\mathrm{y}i} = 200\,\mathrm{kN}$ （降伏軸力）
- $\tilde{\lambda} = 10.0$ （損傷なしのとき）

α：損傷部材の数

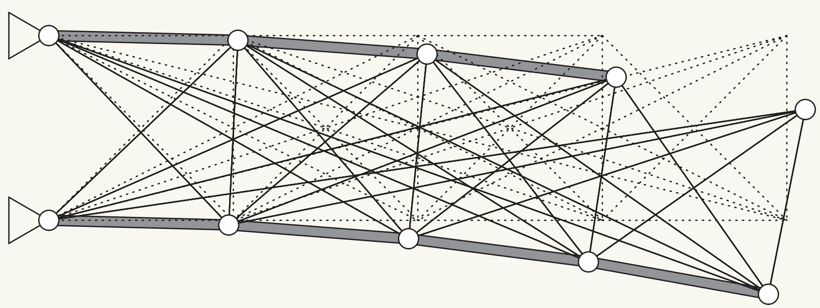


$\tilde{\lambda} = 10.00$

α：損傷部材の数



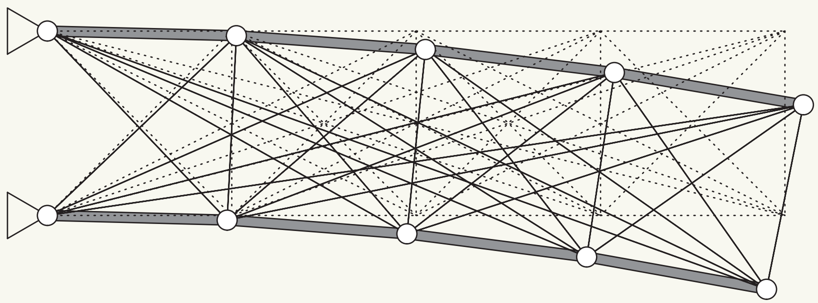
$\tilde{\lambda} = 10.00$



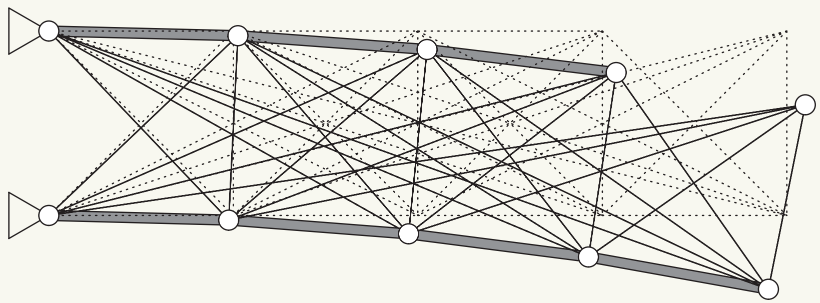
$\alpha = 1,\ \lambda^{\mathrm{worst}} = 8.750$

- 太線：降伏部材

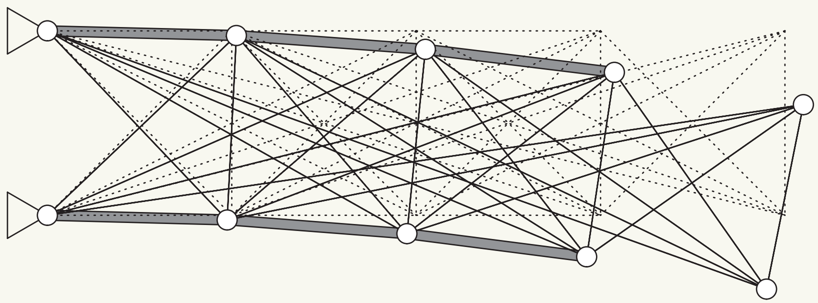
α：損傷部材の数



$\tilde{\lambda} = 10.00$

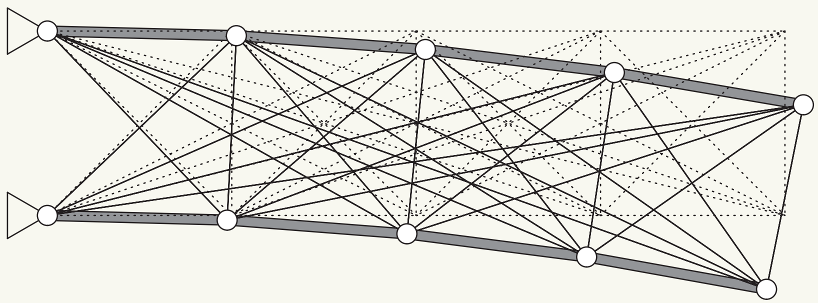


$\alpha = 1,\ \lambda^{\mathrm{worst}} = 8.750$

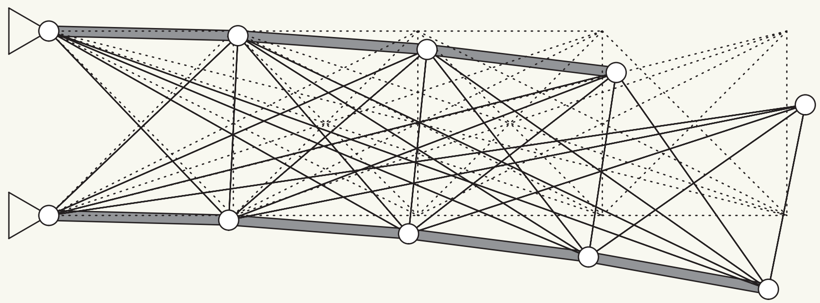


$\alpha = 2,\ \lambda^{\mathrm{worst}} = 7.500$

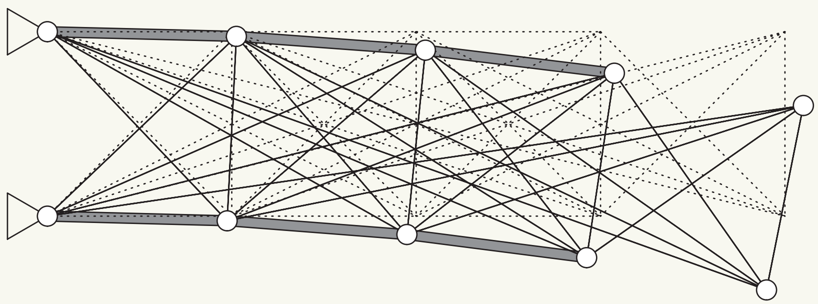
α：損傷部材の数



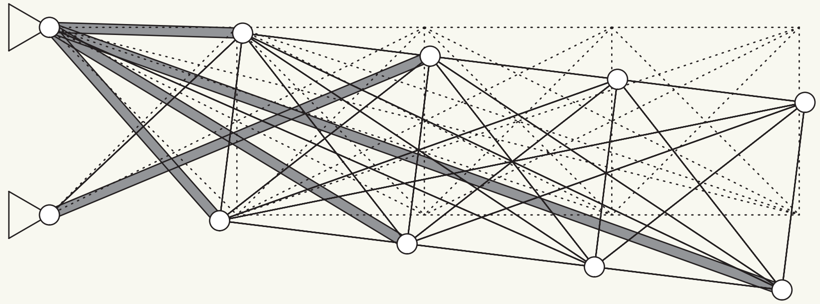
$\tilde{\lambda} = 10.00$



$\alpha = 1,\ \lambda^{\rm worst} = 8.750$



$\alpha = 2,\ \lambda^{\rm worst} = 7.500$



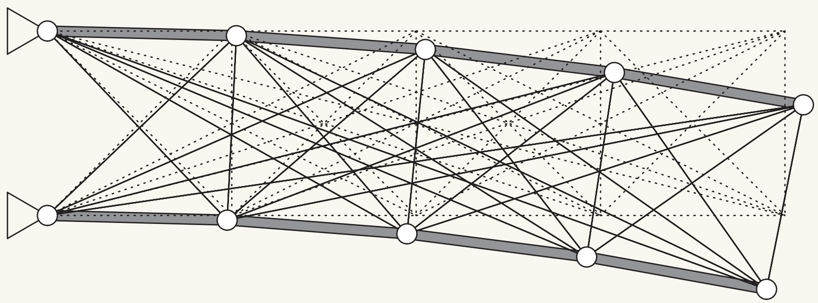
$\alpha = 3,\ \lambda^{\rm worst} = 6.072$

($\alpha = 3$ での損傷部材)

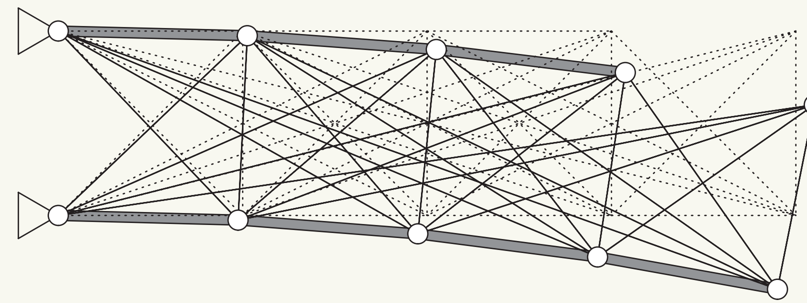
$\not\supseteq$ ($\alpha = 2$ での損傷部材)

- キー部材（5 章）は α に依存

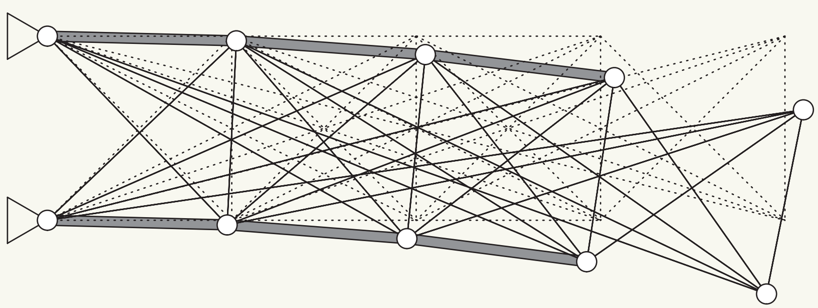
α：損傷部材の数



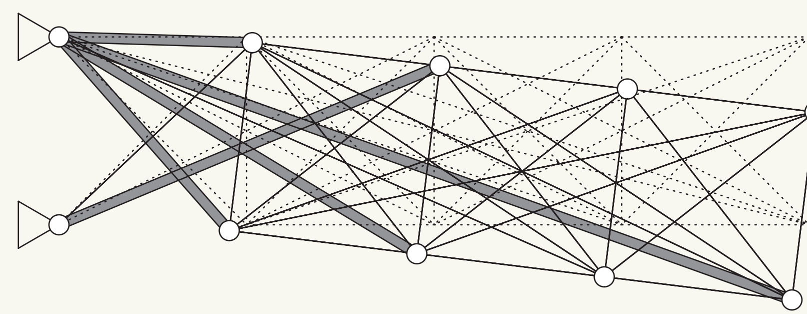
$\tilde{\lambda} = 10.00$



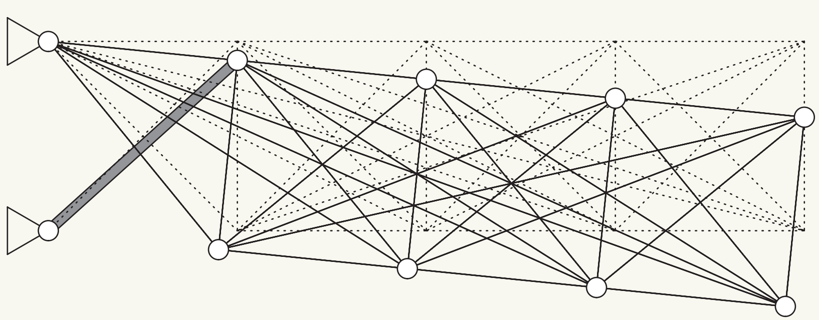
$\alpha = 1,\ \lambda^{\rm worst} = 8.750$



$\alpha = 2,\ \lambda^{\rm worst} = 7.500$



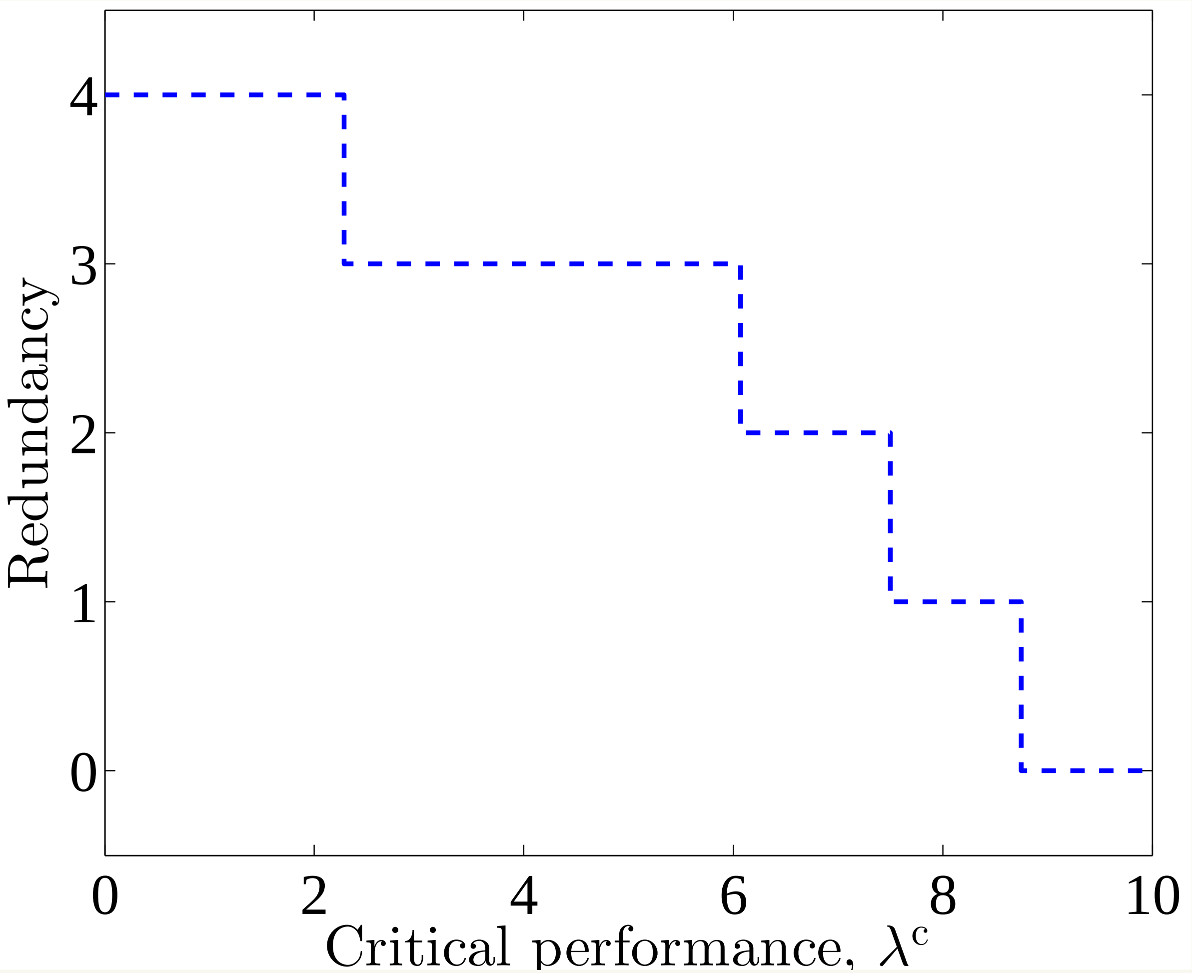
$\alpha = 3,\ \lambda^{\rm worst} = 6.072$



$\leftarrow \alpha = 4,\ \lambda^{\rm worst} = 2.286$

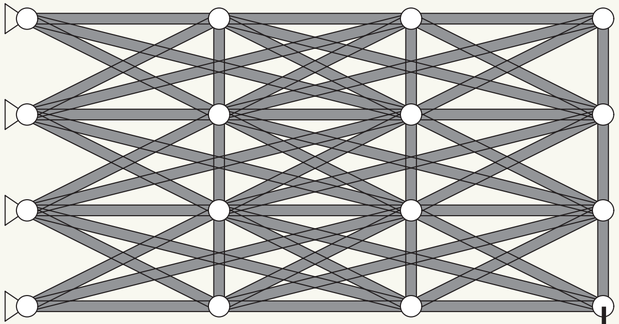
冗長性 と 要求性能

- 冗長性 α vs. 性能（崩壊荷重の下限値）
  - トレード・オフの関係



構造物の 最適設計 と ロバスト最適設計

- たとえば...

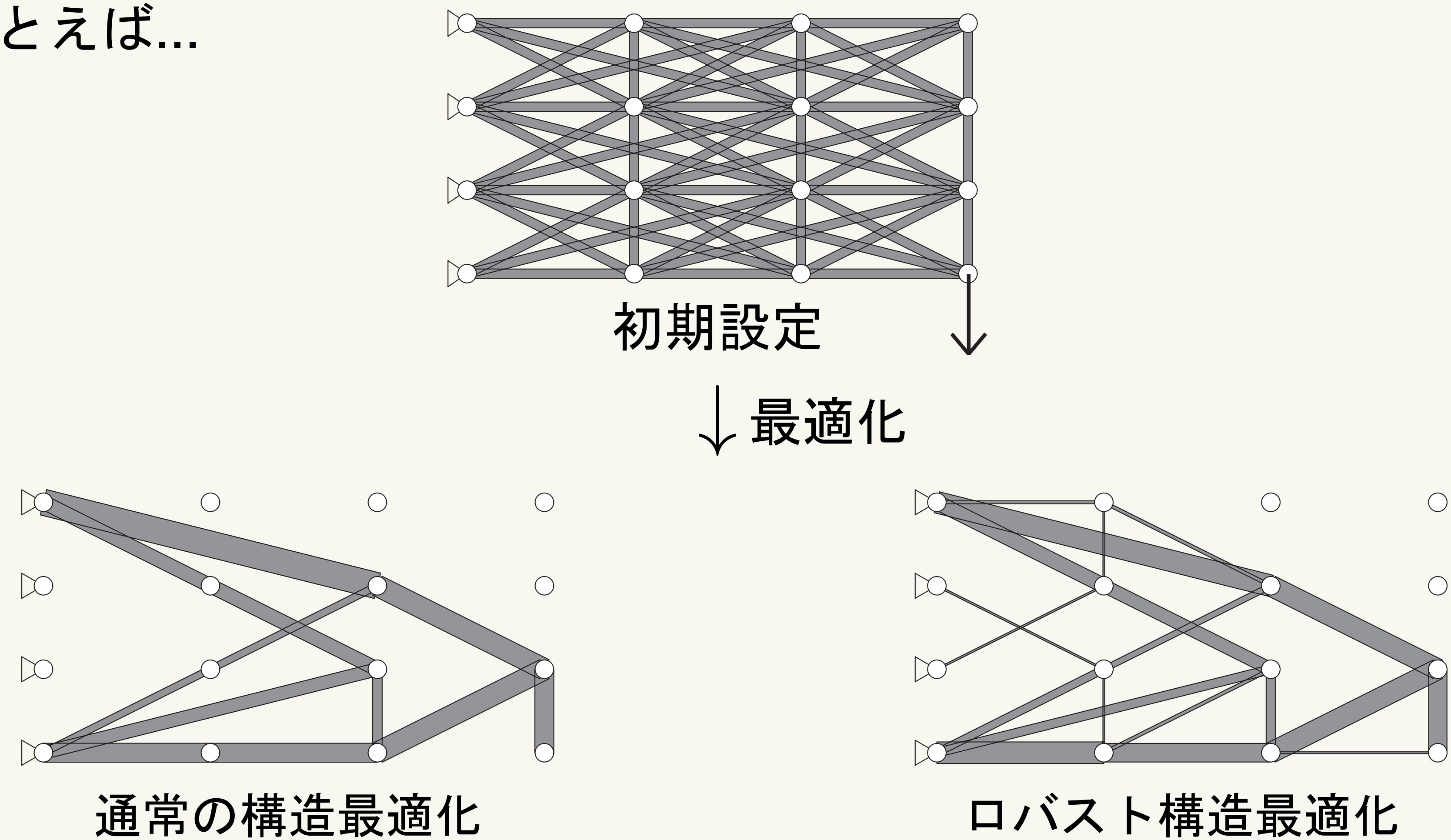


初期設定

↓最適化

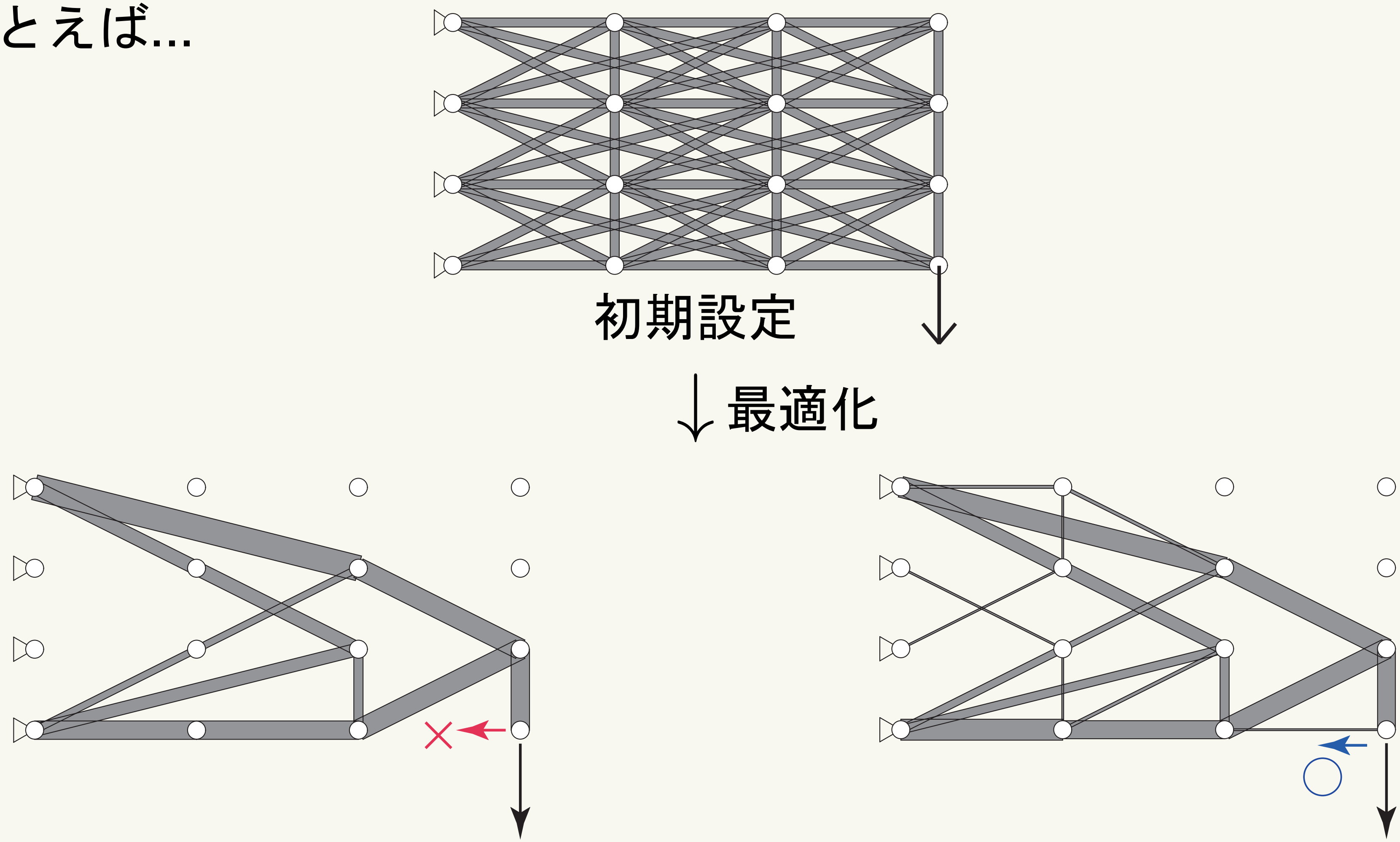
構造物の 最適設計 と ロバスト最適設計

- たとえば...



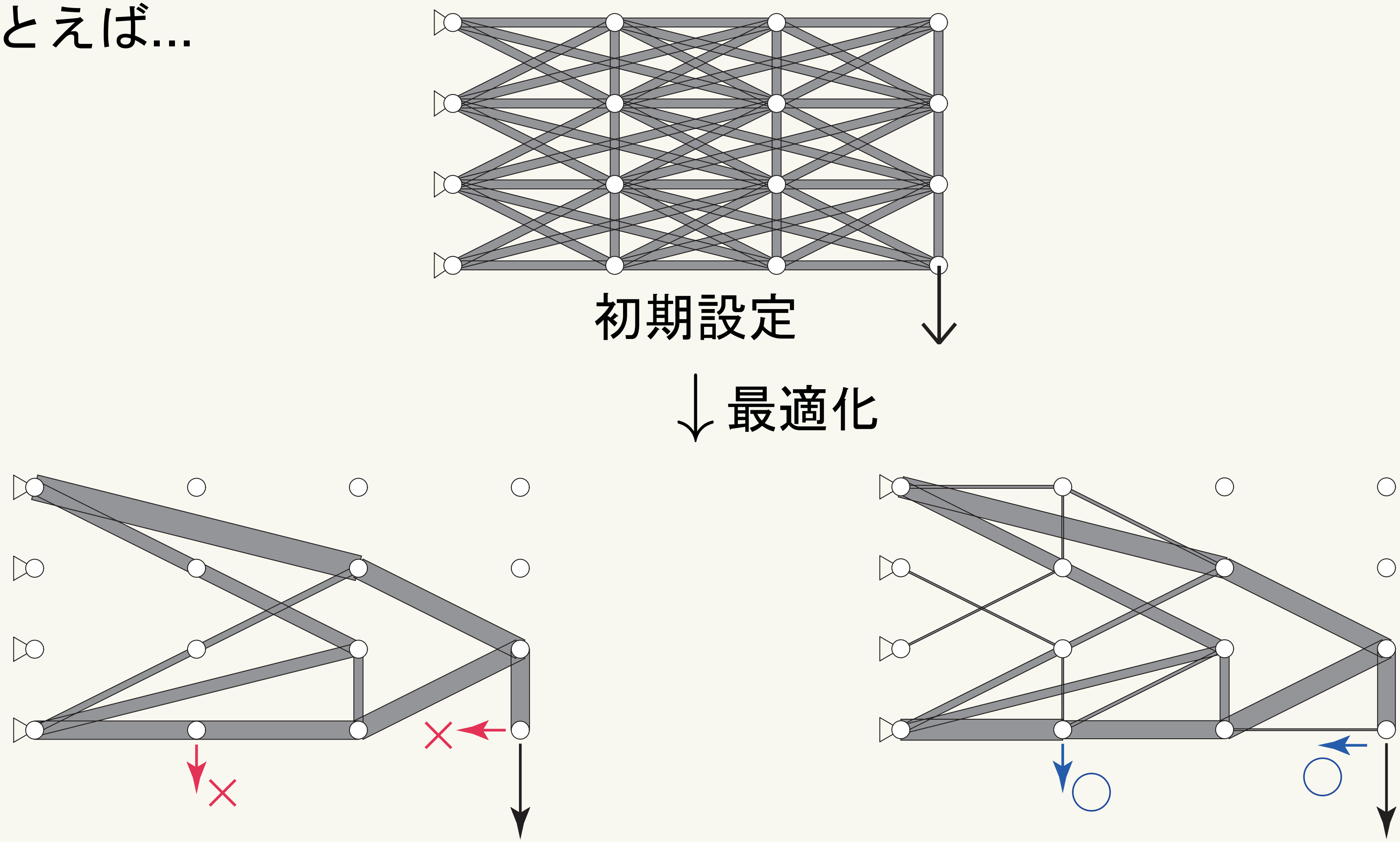
構造物の 最適設計 と ロバスト最適設計

- たとえば...



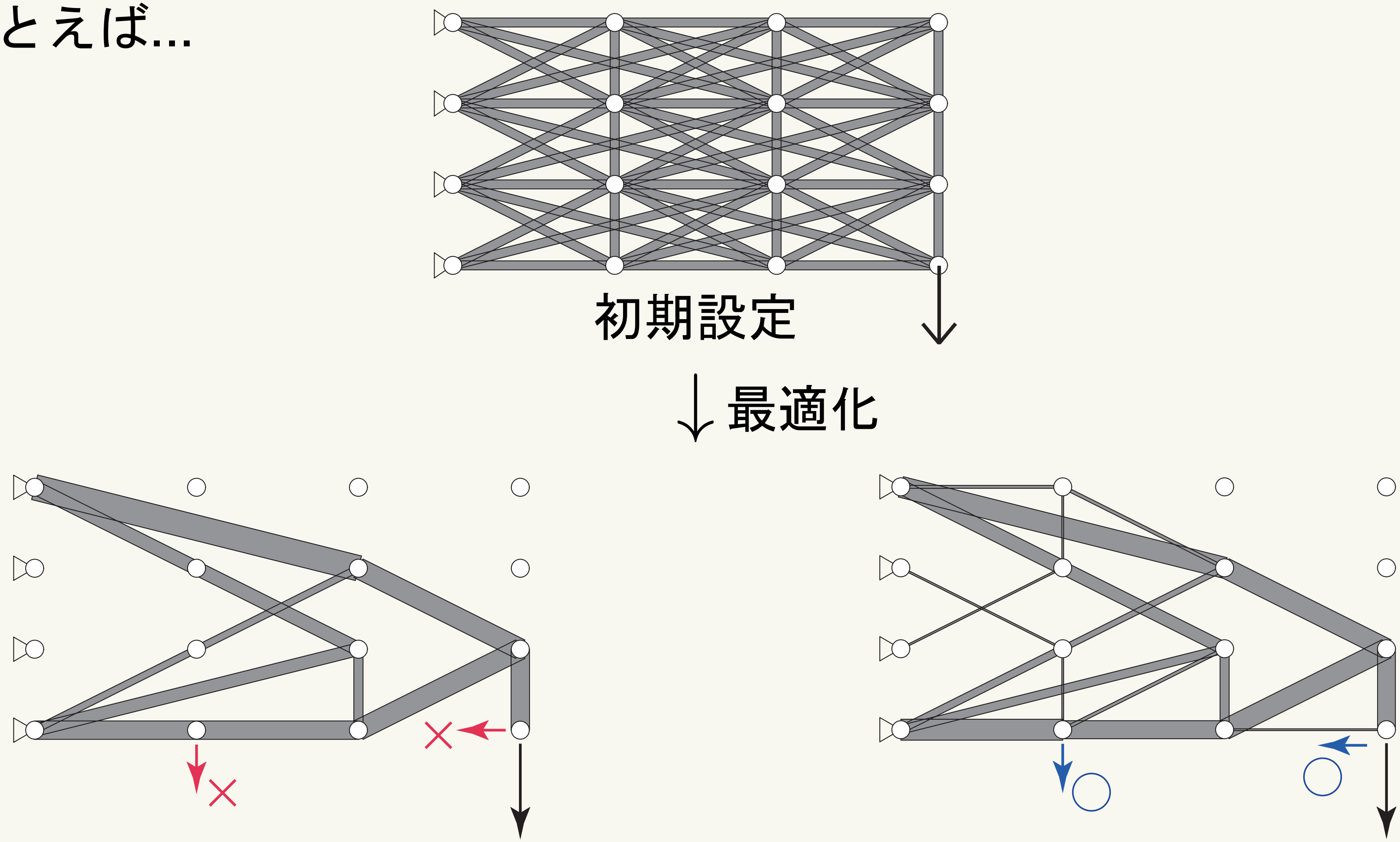
構造物の 最適設計 と ロバスト最適設計

- たとえば...



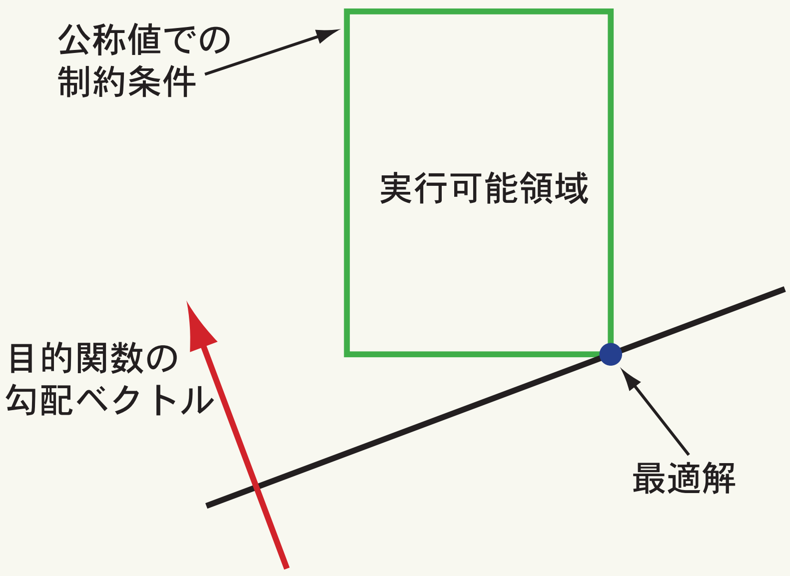
構造物の 最適設計 と ロバスト最適設計

- たとえば...



- 無限個の荷重条件を考慮 $\rightarrow$ 解の安定性を保証
- $\rightarrow$ 8 章, 9 章

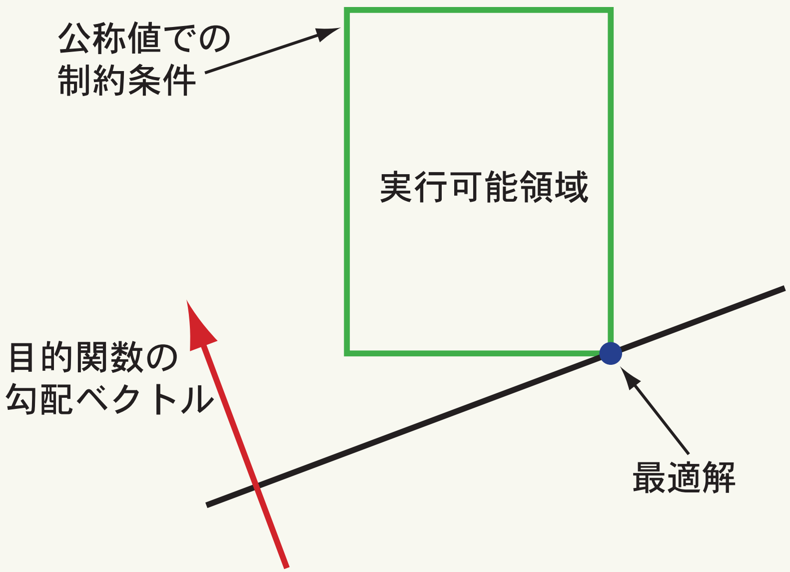
- ロバスト最適化の概念



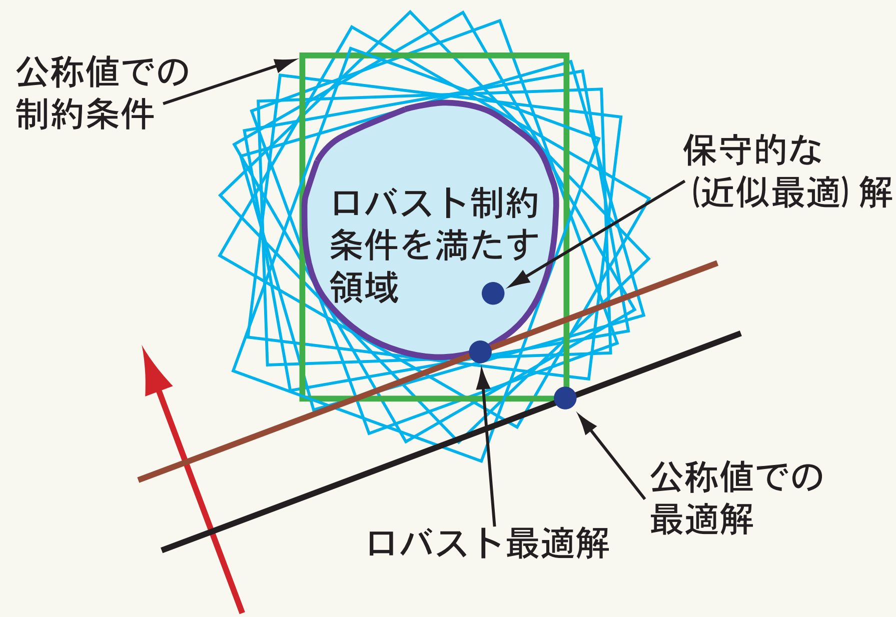
通常の最適化問題

ロバスト最適設計

- ロバスト最適化の概念



通常の最適化問題



ロバスト最適化問題

- 解法（4 章の参考文献）:

[Ben-Tal & Nemirovski ’97], [K & Guo ’10] [K & Takewaki ’06]
[Luo, Kang, Luo & Li ’09] [Pantelides & Ganzerli ’98] [Yonekura & K ’10]

まとめ

- 非確率論的な不確定性モデル
- ロバスト性の評価
  - ロバスト性関数（インフォ・ギャップ理論）
    - 不確定性のレベル α の最大値
    - どの場合にも (= 最悪シナリオでも) 制約を満たす
- 冗長性の評価
  - 損傷（箇所）の不確定性
    - 損傷部材の数 α の最大値
    - キー部材（= 最悪シナリオを引き起こす部材）は α に依存
- ロバスト最適設計
  - α を固定して，どの場合にも制約を満たす設計解