



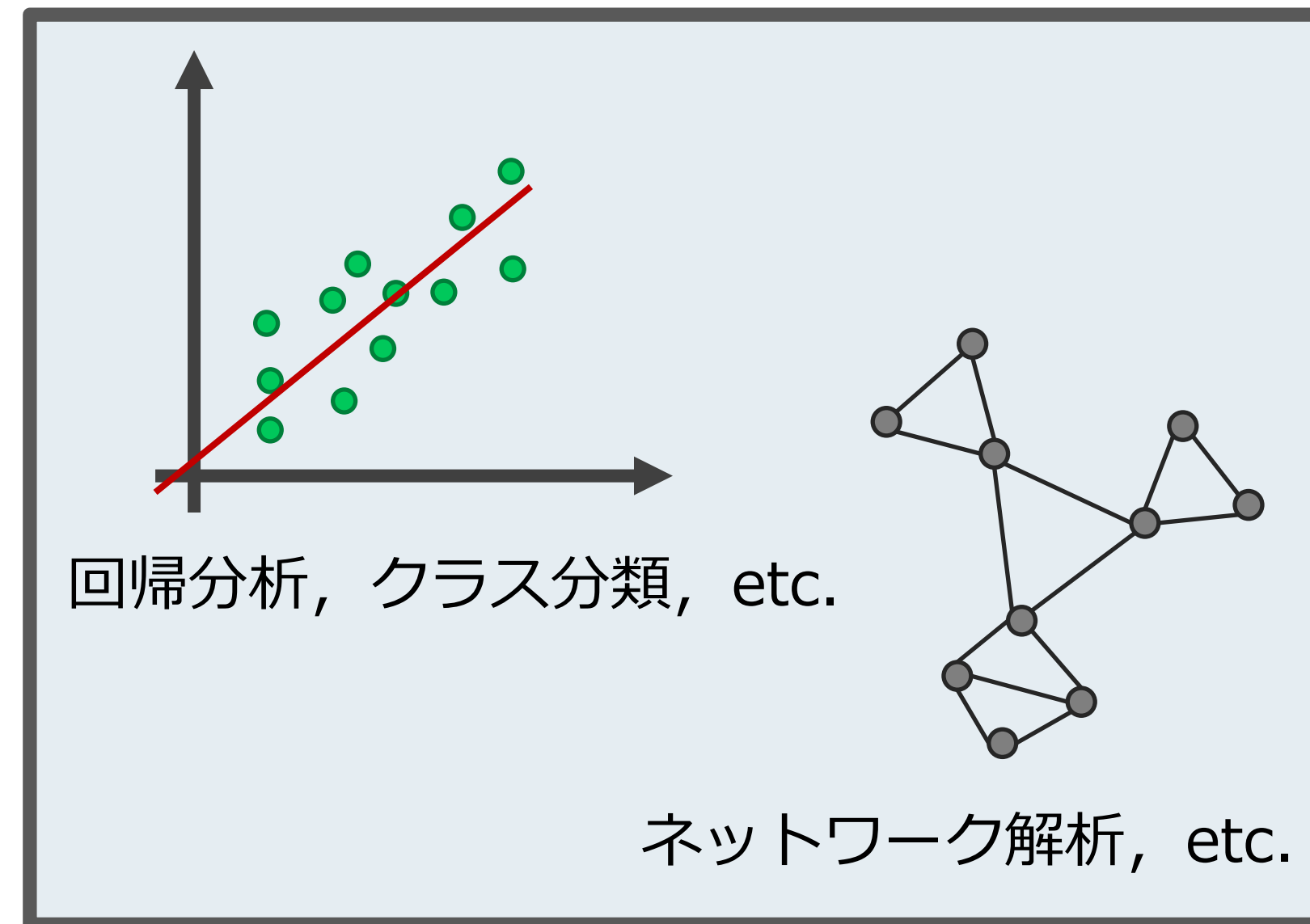
数理最適化（主に連続最適化）に関する研究

機械学習やデータマイニングから生じる最適化問題をうまく解き、実社会の問題解決に役立てたい

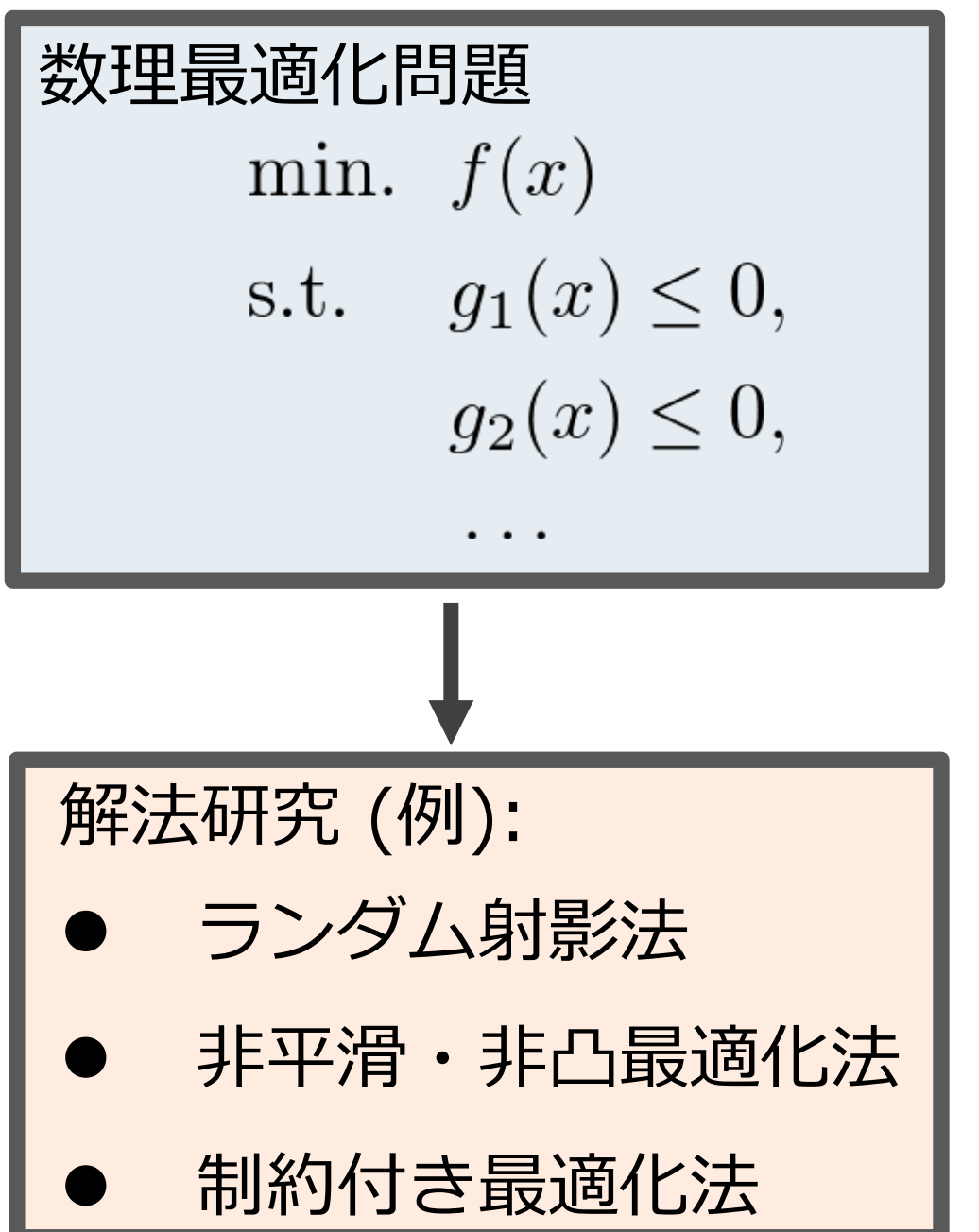
チームの強み：

- 大規模問題に対するランダム射影を用いた効率的解法
- 非凸最適化問題に対する理論保証つき解法
- 制約付き最適化問題に対する効率的解法

機械学習やデータマイニング



モデル化



解法研究 (例):

- ランダム射影法
- 非平滑・非凸最適化法
- 制約付き最適化法

チームの得意とするところ

ランダム部分空間正則化 ニュートン法 [Fuji, Poirion, Takeda, arXiv:2209.04170, 投稿中]

問題設定: 大規模変数をもつ非凸最適化問題  
研究成果: 次元縮小した逆行列計算を用いた正則化ニュートン法を構築. ランダム部分空間法では, 最悪反復回数 (反復計算量) と局所 1 次収束性の両立を達成は初

提案手法のアイデア

横長( $d \ll n$ )ランダム行列  $P_k$  を各反復で取り直して作った次元縮小最適化問題を 2 次近似して, 探索方向を計算

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \rightarrow \min_{u \in \mathbb{R}^d} f(x_k + P_k^T u)$$

ランダム部分空間正則化ニュートン法の更新式:

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k$$

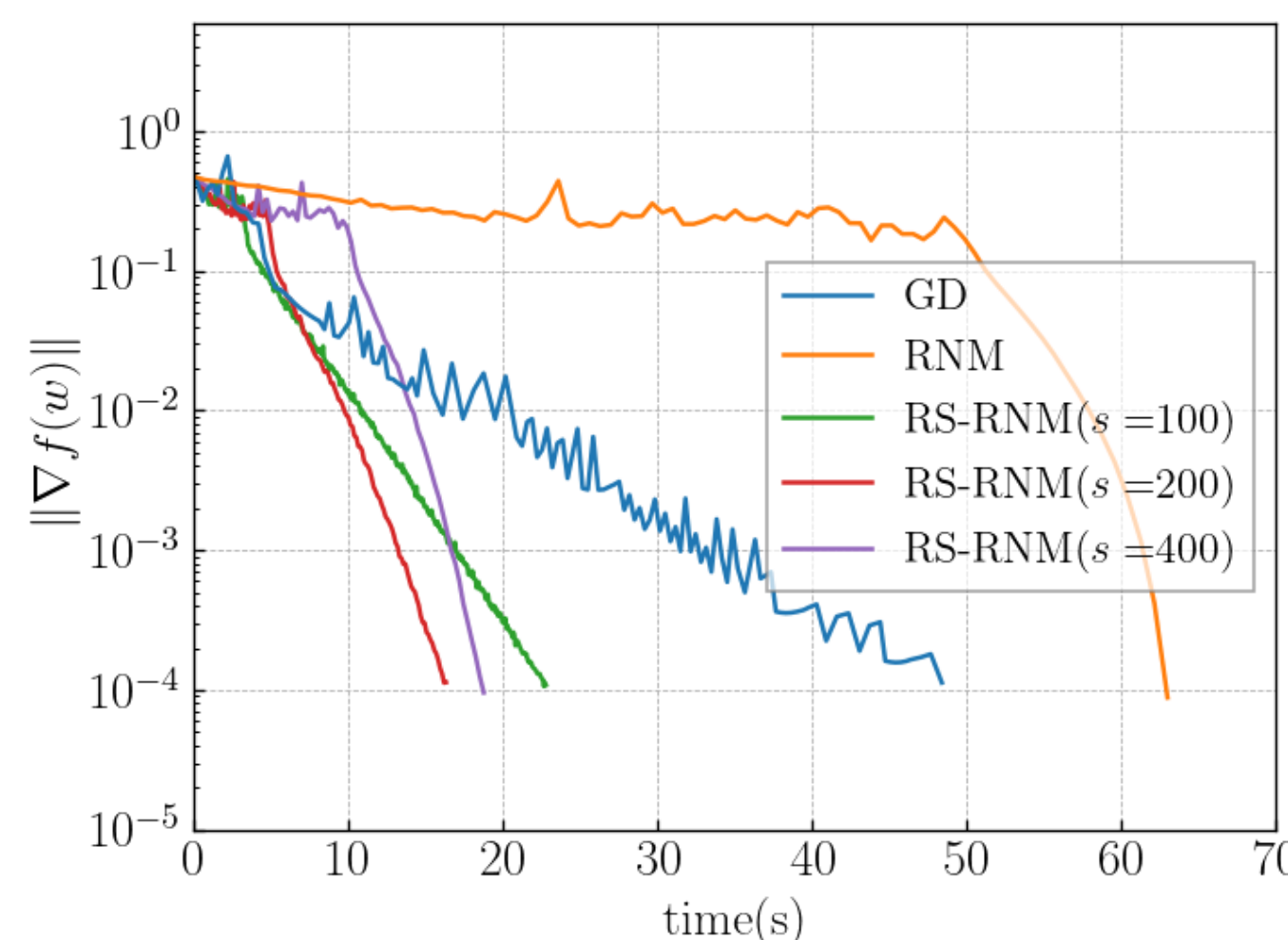
$$d_k = -P_k^T (P_k \nabla^2 f(x_k) P_k + \eta_k I_d)^{-1} P_k \nabla f(x_k)$$

正則化(凸化)+2次近似して得られた解を元の空間に戻す

次元縮小された行列の逆行列計算により, 探索方向  $d_k$  の計算可能, かつ, 次元縮小前と同じオーダーの反復計算量を達成

局所的収束性の解析

- 一般的な場合: 1 次収束
- 局所的最適解におけるヘッセ行列がランク落ちしている場合: 超 1 次収束



非凸最適化問題に対するランダム部分空間法との比較	Random Subspace Algo.	Iter Comp.	Local
	Direct Search [Roberts and Royer, 2022]	$O(\epsilon^{-2})$	-
	Adaptive Cubic Reg. [Shao, 2022]	$O(\epsilon^{-3/2})$	-
	Gauss Newton [Cartis et al., 2022]	$O(\epsilon^{-2})$	-
	Regularized Newton [Fuji et al., 2022]	$O(\epsilon^{-2})$	1+

非線形 SDP の 2 次停留点へ収束する内点法の開発 [Arahata, Okuno, Takeda, Comp. Opt. & Appl., 2023]

非線形半正定値最適化問題 (NSDP)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ s.t. } X(x) \in \mathbb{S}_+^m$$

$\mathbb{S}_+^m$ :  $m$  次実半正定値対称行列の集合

$f, X$ : とともに 2 回連続的微分可能

NSDPの応用例

- 固有値最適化
- 半正定値行列分解
- ランク最適化, etc

$X$  の形を対角行列に限定すれば, NSDP は標準的な非線形最適化

研究背景: NSDPに対する既存アルゴリズムの理論保証は全て局所最適性の 1 次の必要条件であるカルーシュ・キューン・タッカー条件を満たす点 (KKT 点) への収束のみだった

研究成果 1: KKT 条件より強い 2 次の最適性条件を満たす点 (SOSP) への大域的収束性をもつアルゴリズムを初めて開発

研究成果 2: SOSP への収束に要する最悪反復回数 (反復計算量) を評価

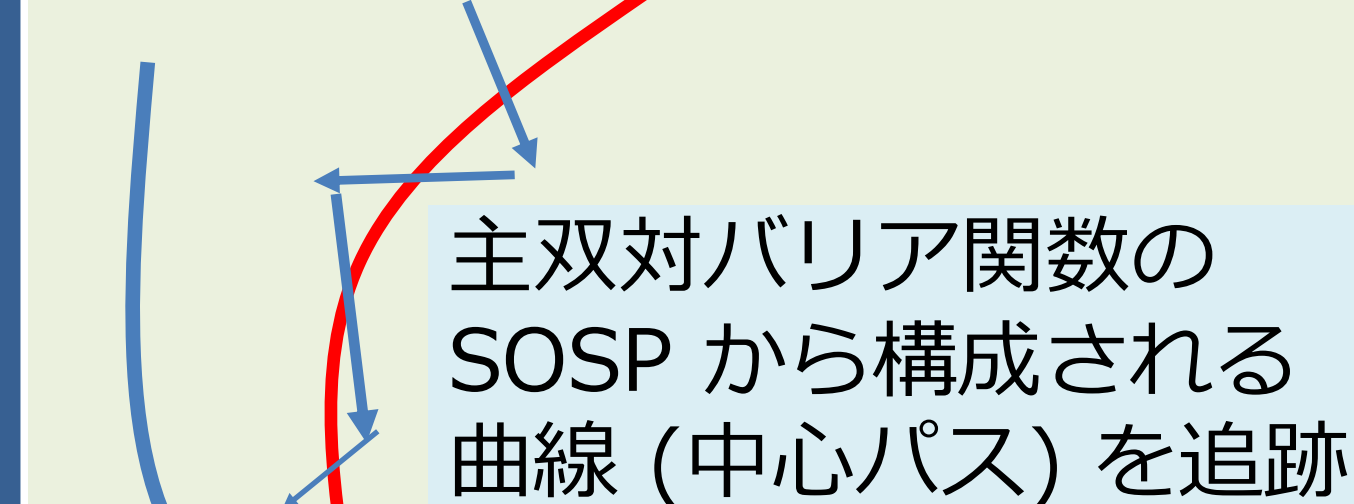
提案手法のアイデア

$\mu \rightarrow 0$  としながら主双対バリア関数の SOSP を勾配法 + 負曲率方向で求める

$$F_{PB}(x; \mu) + F_{BC}(x, \Lambda; \mu)$$

$$F_{PB}(x; \mu) := f(x) - \mu \log \det X(x)$$

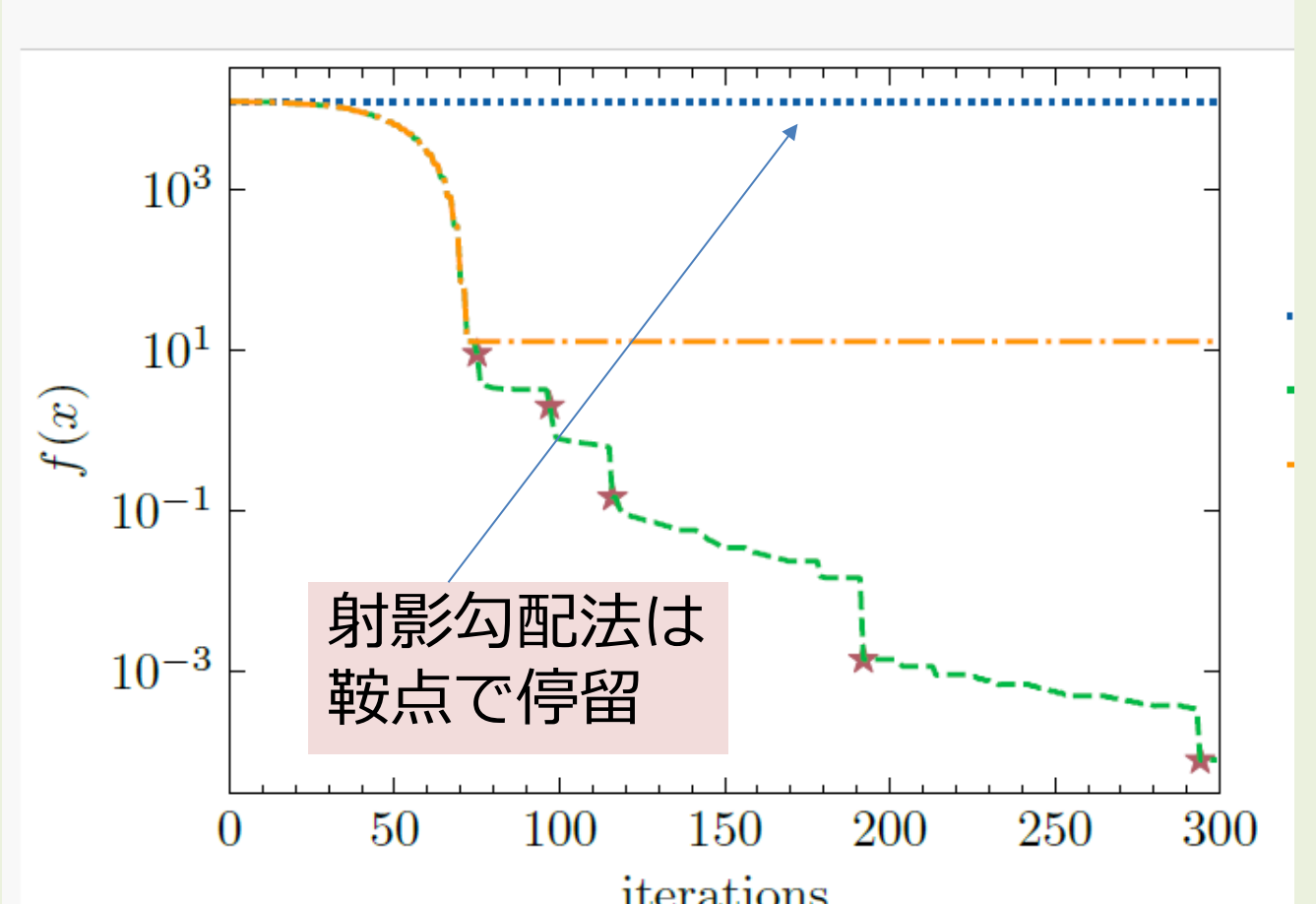
$$F_{BC}(x, \Lambda; \mu) = \text{Tr}(X(x)\Lambda) - \mu \log \det X(x)\Lambda$$



NSDP の SOSP

$\mu \rightarrow 0$  によって中心パスは NSDP の SOSP に収束 (本研究の結果の一つ)

数値実験 (射影勾配法との比較)



- 射影勾配法
- 提案法 (負曲率方向なし)
- 提案法
- 負曲率方向使用

制約付き最小二乗問題に対する Levenberg-Marquardt 法 [Marumo, Okuno, Takeda, Comp. Opt. & Appl., 2022]

問題設定: 凸制約付き最小二乗問題

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ F(x) := \sum_{i=1}^n (f_i(x))^2 \right\} \text{ s.t. } x \in C$$

- $f_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ : 滑らかな関数
- $C \subseteq \mathbb{R}^d$ : 凸集合, 射影が計算可能

LM 法 [Levenberg, 1944], [Marquardt, 1963]

$$x_{k+1} = \underset{x \in C}{\text{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^n \left( f_i(x_k) + \nabla f_i(x_k)^T (x - x_k) \right)^2 + \mu_k \|x - x_k\|^2 \right\}$$

$f_i(x)$  の一次近似

元々は無制約問題 ( $C = \mathbb{R}^d$ ) のための手法

本研究の貢献: 以下の 2 つを示した

1.  $\mu_k \propto \sqrt{F(x_k)}$  と定め, 子問題を「ある近似条件」を満たすように近似的に解くと,
  - a)  $\epsilon$ -停留点が  $O(\epsilon^{-2})$  反復で求まる
  - b) 局所 2 次収束を達成
2. a) を達成するだけなら, 子問題をより不正確に解いてもよい

既存研究との比較

- 制約付き問題に対する LM 法に反復計算量保証をつけたのは初 [Ueda & Yamashita, 2010], [Zhao & Fan, 2016] 等は無制約問題に対し  $O(\epsilon^{-2})$
- 反復計算量  $O(\epsilon^{-2})$  と局所 2 次収束の両立は初 [Bergou+, 2020]: 無制約問題に対し  $O(\epsilon^{-2} \log \epsilon^{-1})$  と局所 2 次

数値実験

十数種類の問題例で既存手法と性能比較. 提案 LM 法は安定して高速であることを確認

黒: 提案LM, 紫: 近接勾配法, 他: 既存LM

