線形計画法

1　線形計画問題とは

線形不等式系と線形関数が与えられたとき，線形不等式系を満たす解の集合の中で，与えられた線形関数を最大化 (最小化) するものを見つける問題である．典型的な線形計画問題は以下のように記述される．

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{maximize} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n & & \\
\text{subject to} & a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \quad (i=1,\ldots,k), \\
 & a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & \leq & b_i \quad (i=k+1,\ldots,k'), \\
 & a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & \geq & b_i \quad (i=k'+1,\ldots,m).
\end{array}
$$

ここで，関数 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ は**目的関数**（objective function）と呼ばれる．制約条件を満たす解を**実行可能解**，そのような解で作られる領域を**実行可能領域**と呼ぶ．また，実行可能解の中で目的関数を最大化（最小化問題では最小化）するものは，**最適解**（optimal solution）と呼ばれる．

解こうとする線形計画問題を**基準形**（canonical form) と呼ばれる扱いやすい形のものに限定する．基準形の線形計画問題は，次のような形：

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{maximize} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n & & \\
\text{subject to} & a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & \leq & b_i \qquad (i=1,\ldots,m) \\
 & & & & x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ldots, & & & x_n & \geq & 0
\end{array}
$$

で表現され，

- 最大化問題になっている
- すべての変数 $x_1,x_2,\ \ldots,x_n$ に非負制約がある
- 非負制約以外はすべて片方向（ $\leq$ ）の不等式制約式であり，等式制約式は含まない

といった特徴がある．一般の線形計画問題は，式の同値変形や変数変換により，簡単に基準形の問題に変換できるので，理論上は基準形の問題だけを扱えば十分である．

2　生産計画問題－利益が最大となる生産量の組合せを求める

３種の原料 A,B,C を原材料として，製品 Q,R の２種類の製品を生産している．各製品１単位生産することによって得られる収益と，１単位生産するために必要な原料量が下表のように与えられている．原料の１日あたりの最大供給量が表の右列のように制限されているとして，総収益を最大にするような各製品の１日あたりの生産量を決定せよ．

	（トン／単位） 製品 Q	 製品 R	（トン／日） 最大供給量
原料 A	1	1	4
原料 B	2	0	5
原料 C	2	1	7
収益 （百万円／単位）	3	2	

各製品 (製品 Q, 製品 R) の生産量をそれぞれ x_1, x_2 単位と置くことにする．利益を最大にする問題は，次のような線形計画問題として定式化できる．

$$
\begin{array}{llcccl}
\displaystyle\max_{x_1,x_2} & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{subject to} & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & & & \leq & 5 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\
 & & & \multicolumn{3}{l}{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0}
\end{array}
\tag{1}
$$

演習問題 1 x_1-x_2 平面上で実行可能領域を示せ．また，最適解を図示せよ．

3　シンプレックス法 (単体法)

線形計画問題の実行可能領域は多面体をつくる．多面体内の点で目的関数を最大にする点を見つければ，その点が最適解に対応している．目的関数は線形だから，その実行可能領域の端点で最大値 (もしくは最小値) が達成される．辺や多面体の面で最大値が達成される場合もあるが，その場合には端点においても最大値が達成されることに注意したい．

よって，線形計画問題では，実行可能領域の端点で最も目的関数値が大きいものを探せばそれが最適解となる．しかし，端点の個数が次元数 (n) と制約式数 (m) によって組み合わせ的に (高々，${}_nC_m$) 増加するため，全ての端点を計算し，その中で最も大きいものを探すのは不可能である．そこで、端点を効率良く見つける方法がシンプレックス法 (単体法) である．シンプレックス法は，目的関数が大きくなるように実行可能領域の端点を辿りながら最適解に到達する方法である．与えられた問題が次の条件:

- 基準形である
- 右辺の定数 b_i がすべて非負である

を満たしていれば，自明な実行可能解から出発し，解を単調に改善していくことができる．

問題 (1) をシンプレックス法で解くため，スラック変数と呼ばれる変数 x_3, x_4, x_5 を各不等号制約式に導入し，問題を

$$\begin{array}{llcccccc} \max\limits_{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5} & & & & 3x_1 & + & 2x_2 \\ \text{subject to} & x_3 & = & 4 & - & x_1 & - & x_2 \\ & x_4 & = & 5 & - & 2x_1 & & \\ & x_5 & = & 7 & - & 2x_1 & - & x_2 \\ & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0} \end{array} \tag{2}$$

と書き直す．問題 (1) と問題 (2) の間には，目的関数の値を保存するような実行可能解の 1 対 1 対応があり，同値な問題と考えることができる．

(2) の左辺に現われる変数を**基底変数**，右辺の変数を**非基底変数**と呼ぶ．非基底変数 x_1, x_2 の値を任意に定めると，すべての等式を満足させるように残りの変数（つまり基底変数 x_3, x_4, x_5）の値が一意に定まる．とくに非基底変数を 0 に固定して得られる解：

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 4, 5, 7)$$

を**基底解**と呼ぶ．以下では (2) を，x_3, x_4, x_5 を基底変数とし，x_1, x_2 を非基底変数とする**辞書**と呼び，目的関数値を表わす変数 z を導入して，もう少し簡潔に以下の形で辞書を表現する:

$$\begin{array}{ccccccc} z & = & & & 3x_1 & + & 2x_2 \\ \hline x_3 & = & 4 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 5 & - & 2x_1 & & \\ x_5 & = & 7 & - & 2x_1 & - & x_2 \end{array} \tag{3}$$

次のルールのもとでこの基底解の改善を図ることにする．

(i) 非基底変数の中で目的関数の係数が正であるものを 1 つ選ぶ (x_i とする)．正のものが無ければ終了．

(ii) x_i の値を，他の変数が負にならないようにギリギリまで増加させる．すると，基底変数の中で 0 になったものがあるはず (x_j とする)．

(iii) x_i を基底変数，x_j を非基底変数とみなした新しい辞書をつくる．

[**サイクル 1**]
(3) の式 z に含まれる変数の係数はどれも正だから，どの変数を増やしても z の値は増加する．x_1 を選び，$x_2 = 0$ を固定して x_1 の値を増加させる．(3) より

$$\begin{array}{ccccc} x_3 & = & 4 & - & x_1 \\ x_4 & = & 5 & - & 2x_1 \\ x_5 & = & 7 & - & 2x_1 \end{array}$$

となるが，$x_3, x_4, x_5 \geq 0$ なので解の実行可能性を維持するためには x_1 の値は高々

$$\min\{4,\ 2.5,\ 3.5\} = 2.5$$

までしか大きくならない．この計算を**比の計算** (ratio test) と呼ぶ．

演習問題 2 比の計算では，幾何学的には何を計算しているのか．

(3) で $x_1 = 2.5$ とすれば $x_4 = 0$ となり，非基底変数 x_1 は基底変数に，基底変数 x_4 は非基底変数に変わり，辞書は以下のように更新される．

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
z & = & 7.5 & - & 1.5x_4 & + & 2x_2 \\
\hline
x_3 & = & 1.5 & + & 0.5x_4 & - & x_2 \\
x_1 & = & 2.5 & - & 0.5x_4 & & \\
x_5 & = & 2 & + & x_4 & - & x_2
\end{array}
\tag{4}
$$

(3) から (4) を得る手続きを、2 行 1 列 (略して (2,1)) を中心とする**ピボット操作** (pivot operation) という．

[**サイクル 2**]

演習問題 3 *(4)* に対してピボット操作を行いなさい．*(*必要であれば、アルゴリズム *3.1* を参考のこと *)*

演習問題 4 シンプレックス法において基底解 (x_1, x_2) の値がどのように変化したかを，演習問題 *1* の図に示せ．

アルゴリズム 3.1 (シンプレックス法)

入　力: 実行可能な辞書:

$$
\begin{array}{rclclclclcl}
z & = & c_0 & + & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n \\
\hline
x_{(n+1)} & = & b_1 & - & a_{11}x_1 & - & a_{12}x_2 & - & \cdots & - & a_{1n}x_n \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
x_{(n+m)} & = & b_m & - & a_{m1}x_1 & - & a_{m2}x_2 & - & \cdots & - & a_{mn}x_n
\end{array}
$$

Step1: （最適性判定）

- $c_s > 0$ となる添字 s $(1 \le s \le n)$ を1つ選ぶ.
- もし，そのような添字 s がなければ終了（現在の基底解は最適解である）.

Step2: （非有界性判定）

- 今の基底解から実行可能性を保ったまま非基底変数 x_s だけを出来る限り増加させる.

  つまり,

  $$b_r/a_{rs} = \min\{b_i/a_{is} : a_{is} > 0,\ 1 \le i \le m\}, \quad a_{rs} > 0$$

  を満たす任意の行番号 r を求める.

- そのような r がなければ終了（すなわち，全ての $1 \le i \le m$ について $a_{is} \le 0$ であり，

  変数 x_s を限りなく増加できるので，与えられた問題は非有界）.

- 存在する場合は、(r, s) を中心とするピボット操作を行ない，*Step1* へもどる.

演習問題 5 アルゴリズム *3.1* の *Step1* に記された，シンプレックス法の最適性判定の条件を書きなさい．また，その正当性を説明しなさい.

演習問題 6 基底解が一意の最適解であるための十分条件を示しなさい. *(ヒント：シンプレックス法の最適性判定の条件を強めることによって得られる)*

演習問題 7 *アルゴリズム 3.1* の *Step2* に記された，シンプレックス法の非有界性判定の条件を書きなさい．また，その正当性を説明しなさい．

4　シンプレックス法の反復回数

一般にシンプレックス法 (アルゴリズム 3.1) では，ピボット列の選択 (Step1 の添字 s の選び方) に多くの自由度がある．そして，実際に線形計画問題をシンプレックス法で解く場合，その選択の仕方が収束するまでにかかる総ピボット数に強く影響をおよぼすことが知られている．以下の 2 つが最も代表的なものである．

最大係数規則：　シンプレックス法 Step1 において，$c_s > 0$ なる列番号 s が複数個あれば，その中で係数 c_s が最も大きなものを選ぶ．
最大改善規則：　シンプレックス法 Step1 において，$c_s > 0$ なる列番号 s が複数個あれば，その中で $c_s \times r_s$ の最も大きなものを選ぶ．ここで，

$$r_s = \min\{b_i/a_{is} : a_{is} > 0, 1 \leq i \leq m\}$$

シンプレックス法の有限回収束性を導くために**最小添字規則** (Bland のピボット選択規則) が重要な役割を果たすが，最も収束の遅い規則であることが分かっている．結論として，現在のところ最大係数規則が平均的な振舞いにおいて最も良い（無難な）規則であるといって良いだろう．

ここでは詳細を省くが，シンプレックス法は必ず有限回の反復で終了することが示せる．これは凸多面体の端点が有限個しか存在しないことを根拠にしているが，それではシンプレックス法の反復回数は実際にはどの程度の大きさになるのだろうか．

ここで，シンプレックス法にとって最も都合の悪い問題である Klee-Minty の問題を紹介する：

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j \\ \text{subject to} & 2\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i \leq 100^{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, n \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{array}$$

この問題の実行可能領域は，n 次元空間の単位立方体を巧妙に歪ませて作ったもので，単位立方体と同様に 2^n 個の端点を持っているが，原点を出発してシンプレックス法 (最大係数規則) を適用すると，最適解が得られるまでに $2^n - 1$ 回の反復が必要になる．これは，運が悪ければ，シンプレックス法ではすべての端点が生成される可能性があることを示している．

$n = 3$ のケースを考えてみる：

$$
\begin{array}{rrcrcrcr}
\text{maximize} & 100x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & & \\
\text{subject to} & x_1 & & & & & \leq & 1 \\
 & 20x_1 & + & x_2 & & & \leq & 100 \\
 & 200x_1 & + & 20x_2 & + & x_3 & \leq & 10000 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

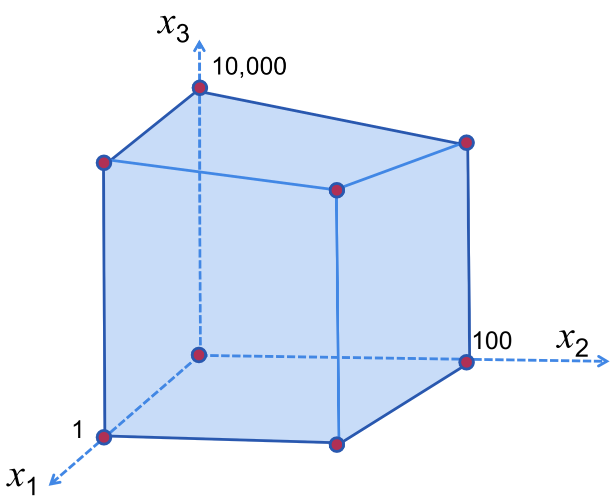
演習問題 8 $n = 3$ の *Klee-Minty* の問題は *8* 個の端点を持ち，シンプレックス法 *(*最大係数規則*)* を適用すると，*7* 反復かかる．下の辞書の空白を埋めなさい．また，基底解がどのように変化したかを，下図に示しなさい．

$$
\begin{array}{rclrrr}
z & = & & 100x_1 & +10x_2 & +x_3 \\ \hline
x_4 & = & 1 & -\boxed{x_1} & & \\
x_5 & = & 100 & -20x_1 & -x_2 & \\
x_6 & = & 10000 & -200x_1 & -20x_2 & -x_3
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rclrrr}
z & = & 100 & -100x_4 & +10x_2 & +x_3 \\ \hline
x_1 & = & 1 & -x_4 & & \\
x_5 & = & 80 & +20x_4 & -\boxed{x_2} & \\
x_6 & = & 9800 & +200x_4 & -20x_2 & -x_3
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{rclrrr}
z & = & 900 & +100x_4 & -10x_5 & +x_3 \\ \hline
x_1 & = & 1 & -\boxed{x_4} & & \\
x_2 & = & 80 & +20x_4 & -x_5 & \\
x_6 & = & 8200 & -200x_4 & +20x_5 & -x_3
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rclrrr}
z & = & 1000 & -100x_1 & -10x_5 & +x_3 \\ \hline
x_4 & = & 1 & -x_1 & & \\
x_2 & = & 100 & -20x_1 & -x_5 & \\
x_6 & = & 8000 & +200x_1 & +20x_5 & -\boxed{x_3}
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{rclrrr}
z & = & 9000 & +100x_1 & +10x_5 & -x_6 \\ \hline
x_4 & = & 1 & -\boxed{x_1} & & \\
x_2 & = & 100 & -20x_1 & -x_5 & \\
x_3 & = & 8000 & +200x_1 & +20x_5 & -x_6
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rclrrr}
z & = & 9100 & -100x_4 & +10x_5 & -x_6 \\ \hline
x_1 & = & 1 & -x_4 & & \\
x_2 & = & 80 & +20x_4 & -\boxed{x_5} & \\
x_3 & = & 8200 & -200x_4 & +20x_5 & -x_6
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{rclrrr}
z & = & \underline{\qquad} & +100x_4 & -10x_2 & -x_6 \\ \hline
x_1 & = & \underline{\qquad} & -x_4 & & \\
x_5 & = & \underline{\qquad} & +20x_4 & -x_2 & \\
x_3 & = & \underline{\qquad} & +200x_4 & -20x_2 & -x_6
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rclrrr}
z & = & \underline{\qquad} & -100x_1 & -10x_2 & -x_6 \\ \hline
x_4 & = & \underline{\qquad} & -x_1 & & \\
x_5 & = & \underline{\qquad} & -20x_1 & -x_2 & \\
x_3 & = & \underline{\qquad} & -200x_1 & -20x_2 & -x_6
\end{array}
$$



演習問題 9 線形計画問題 *(3 変数、3 制約)* を作りなさい．ただし，問題には，自分の学籍番号下 *4* 桁の各数字を必ず *1* 回は使用しなさい．

学籍番号 ______________________

目的関数

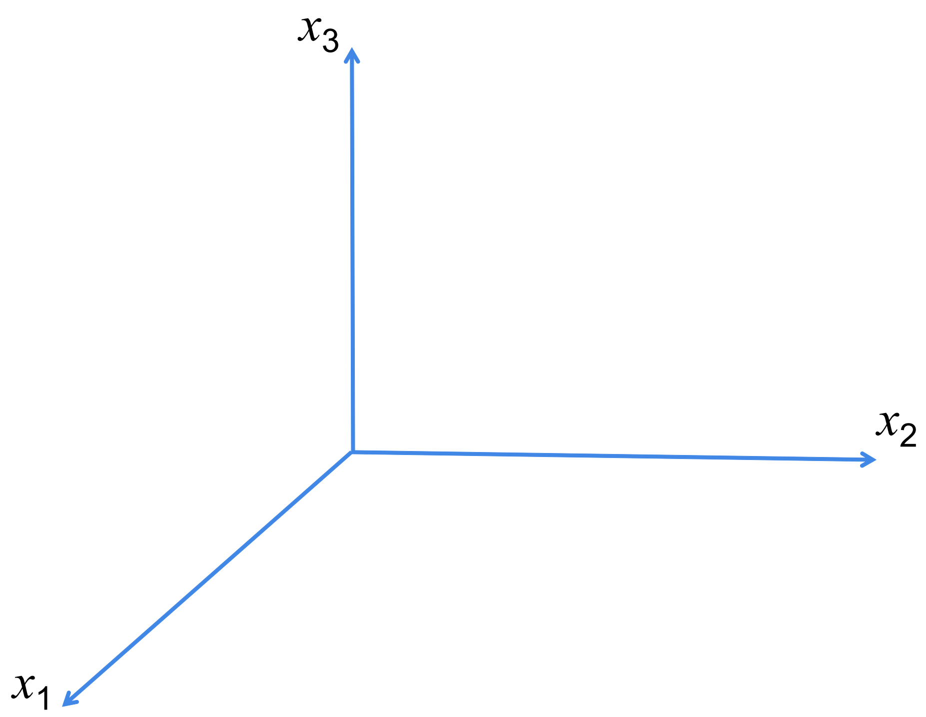
$$\text{maximize } \underline{\qquad\qquad} x_1 + \underline{\qquad\qquad} x_2 + \underline{\qquad\qquad} x_3$$

制約式

$$\begin{aligned}
\underline{\qquad\qquad} x_1 + \underline{\qquad\qquad} x_2 + \underline{\qquad\qquad} x_3 &\leq \underline{\qquad\qquad} \\
\underline{\qquad\qquad} x_1 + \underline{\qquad\qquad} x_2 + \underline{\qquad\qquad} x_3 &\leq \underline{\qquad\qquad} \\
\underline{\qquad\qquad} x_1 + \underline{\qquad\qquad} x_2 + \underline{\qquad\qquad} x_3 &\leq \underline{\qquad\qquad}
\end{aligned}$$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$

演習問題 10 演習問題 *9* の線形計画問題の実行可能領域を図示しなさい．実行可能領域が空の場合には非空になるように，演習問題 *9* の線形計画問題の係数を変更して，図示しなさい．



演習問題 11 演習問題 *9* の線形計画問題をシンプレックス法で解きなさい．下記の欄には，計算のすべてを書く必要はなく，基底解が変わったときの辞書を書きなさい．

演習問題 12 基底解がどのように動いていったのかを，演習問題 *10* の図に示しなさい．また，最適解とその時の目的関数値を書きなさい．