算法設計要論 レポート課題1

担当教員: 武田 朗子, 出題者: 山口 勇太郎

締切日: 2014 年 12 月 9 日

以下の問題群から 2 問選んで解答せよ. ただし, 1–3 より 1 問, 4–6 より 1 問選ぶこと. 以下で, $\mathrm{O}\left(f(x)\right)$ および $\Omega\left(f(x)\right)$ は, それぞれ, ある定数 c が存在して $cf(x)$ が上界および下界になっていることを表す.

1. サイズの等しい互いに素な 2 つの集合 M, W 間の安定マッチングを求めるために, 次のような局所改善型のアルゴリズムを考える:

   Step 0. M と W の間の完全マッチングを任意に 1 つ選んで S $(\subseteq M \times W)$ とする.

   Step 1. S に関する不安定対が存在する限り, 以下を繰り返す. 不安定対を任意に 1 つ選んで $(m, w) \in M \times W$ とし, (m, w'), $(m', w) \in S$ なる $m' \in M$, $w' \in W$ に対し, $S \leftarrow (S \setminus \{(m, w'), (m', w)\}) \cup \{(m, w), (m', w')\}$ と更新する.

   このアルゴリズムは必ずしも停止しない. そのことを以下の例を用いて示せ.

   $M = \{a, b, c\}$, $W = \{x, y, z\}$ とし, 各 $m \in M$ の選好を W 上の全順序 $\prec_m$ で, 各 $w \in W$ の選好を M 上の全順序 $\prec_w$ で次のように与える:

   $$\begin{array}{lll} y \prec_a x \prec_a z, & x \prec_b z \prec_b y, & x \prec_c y \prec_c z \\ a \prec_x c \prec_x b, & c \prec_y a \prec_y b, & a \prec_z c \prec_z b. \end{array}$$

   ただし, 関係 $y \prec_a x$ は「a が x よりも y を好む」ことを表すとする.

2. 各枝が非負の重みを持つ連結な無向グラフに対し, その最大重み全域木が貪欲アルゴリズム (重みの降順に枝を見て, 選択済の枝と併せて閉路を含まなければ選択する, を繰り返す) を用いて求められることはよく知られている. これに関連して, 以下の (a), (b) のいずれかに答えよ.

   (a) 実行可能解を全域木に限らず, 単純閉路 (1 周する途中で同じ点を通らない閉路) を 1 つまで含むことを許容する場合にも, 同様の貪欲アルゴリズム (重みの降順に枝を見て, 選択済の枝と併せて異なる単純閉路を 2 つ以上含まなければ選択する, を繰り返す) が正しく最適解を出力する. このことを示せ.

   (b) 実行可能解として異なる単純閉路を 2 つまで含むことを許容する場合には, 同様の貪欲アルゴリズム (重みの降順に枝を見て, 選択済の枝と併せて異なる単純閉路を 3 つ以上含まなければ選択する, を繰り返す) は必ずしも最適解を出力しない. その例を示せ.

3. 正の整数 a, b が $1 < a < b$ を満たすとする. 1 枚の価値がそれぞれ $1, a, b$ の 3 種類の硬貨のみを用いて, 任意の正の整数金額を支払う状況を考える. このとき, 次の貪欲アルゴリズムが, 用いられる硬貨の合計枚数を常に最小化する場合と, 必ずしも最小化しない場合の 2 通りの組 (a, b) の例を示し, そのことをそれぞれ示せ.

   貪欲アルゴリズム 価値の高い硬貨から順に最大限使う. すなわち, 支払額 x に対し, b の硬貨を $\lfloor x/b \rfloor$ 枚, a の硬貨を $\lfloor (x - b\lfloor x/b \rfloor)/a \rfloor$ 枚使い, 残りを 1 の硬貨で支払う.

4. n, N をそれぞれ正の整数とする．N 枚のコインが与えられ, そのうちただ 1 枚のみが偽物であり他の $N-1$ 枚よりも軽いとする．このとき, 左右の重さの比較のみができる天秤を用いて, n 回以下の比較により偽物を見つけることを考える．これが常に可能な最大の N を求め, その正当性を示せ.

5. 正の整数 n, k が $k \leq n$ を満たすとする．n 個の相異なる整数が与えられたとき, その中で k 番目に小さい整数を求める問題に対し, 以下のアルゴリズムを考える.

   $\mathrm{Find}(S, k)$

   入力: n 個の相異なる整数の集合 S, および, $1 \leq k \leq n$ なる整数 k.

   出力: S の中で k 番目に小さい整数.

   Step 0. $n < 25$ であれば, S の要素を昇順に並べて k 番目の要素を出力する.

   Step 1. S を, 次の条件を満たす $S_1, S_2, \ldots, S_l$ に分割する: $|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_{l-1}| = 5$ かつ $1 \leq |S_l| \leq 5$.

   Step 2. $i = 1, 2, \ldots, l$ に対し, m_i を S_i に属する整数の中央値 (ここでは, 小さい方から $\lceil |S_i|/2 \rceil$ 番目の値と定義する) とし, $M \leftarrow \{ m_i \in S \mid i = 1, 2, \ldots, l \}$ とする.

   Step 3. $\mathrm{Find}(M, \lceil l/2 \rceil)$ により, M に属する整数の中央値を計算し, m とする.

   Step 4. $S_- \leftarrow \{ s \in S \mid s \leq m \}$, $S_+ \leftarrow \{ s \in S \mid s > m \}$ とする.

   Step 5. $|S_-| \geq k$ であれば, $\mathrm{Find}(S_-, k)$ の出力を出力し, $|S_-| < k$ であれば, $\mathrm{Find}(S_+, k - |S_-|)$ の出力を出力する.

   このアルゴリズムが $\mathrm{O}(n)$ 時間で正しい解を出力することを, 以下の手順に沿って示せ.

   (a) 出力される解が正しいことを示せ.

   (b) $|S_-|$ および $|S_+|$ の上界を, n を用いて評価せよ.

   (c) $\mathrm{Find}(S, k)$ の計算時間を $T(n)$ として, T を用いて各 Step の計算時間を評価せよ.

   (d) 上の評価を基に, $T(n)$ に関する漸化式 (不等式) を作り, $T(n) = \mathrm{O}(n)$ を示せ.

6. n を正の整数とする．n 個の整数の列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が与えられたとき, 連続する部分列であってその和が最大になるものを求めたい. 連続部分列の先頭と末尾を全パターン試して和が最大のものを探すと, その組合せは $\binom{n+1}{2} = \Omega(n^2)$ 通りあるので, $\Omega(n^2)$ 時間かかる．以下の分割統治のアイデアを基に, $\mathrm{O}(n \log n)$ 時間で正しい解を出力するアルゴリズムを構成し (具体的な手順を示し), その正当性を示せ.

   分割 与えられた列を中央 (付近) で 2 つの連続部分列に分ける.

   統治 分かれた左右での和最大連続部分列と, 左右にまたがる和最大連続部分列をそれぞれ求め, 3 つのうち和が最大のものを選ぶ.