算法設計要論 レポート課題2

担当教員: 武田 朗子, 出題者: 山口 勇太郎

締切日: 2015 年 1 月 9 日

以下の問題群から 2 問選んで解答せよ．ただし, 1–4 より 1 問, 5–7 より 1 問選ぶこと．以下で, $\mathrm{O}\left(f(x)\right)$ および $\Omega\left(f(x)\right)$ は, それぞれ, ある定数 c が存在して $cf(x)$ が上界および下界になっていることを表す．

1. 1 枚の価値がそれぞれ $1, 5, 7$ の 3 種類の硬貨のみを用いて, 任意の正の整数金額を支払う状況を考える．このとき, 「価値の高い硬貨から順に最大限使う」という貪欲アルゴリズムは, 用いられる硬貨の合計枚数を必ずしも最小化しない．任意の金額に対して, 用いられる硬貨の合計枚数が最小であるような支払い方法を求めるアルゴリズムを, 動的計画法に基づいて構成し, その正当性を示せ．また, そのアルゴリズムの計算量を評価せよ．

2. n を正の整数とする．n 個の整数の列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が与えられたとき, 連続する部分列であってその和が最大になるものを求めたい．連続部分列の先頭と末尾を全パターン試すと $\Omega(n^2)$ 時間かかるところ, 前回の課題では, 分割統治法に基づいて $\mathrm{O}(n \log n)$ 時間のアルゴリズムを構成した．今回は, 動的計画法に基づいて $\mathrm{O}(n)$ 時間のアルゴリズムを構成し, その正当性を示せ．

3. n を正の整数とし, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ をそれぞれ正の整数とする．$1 \leq i \leq n$ なる各整数 i に対し, a_i 枚のコインからなる山 M_i があるとし, 2 人で行う以下のゲームを考える．

   (i) プレーヤーは先手と後手に分かれ, 先手から始めて交互に次の操作 (ii) を繰り返し, 操作 (ii) ができなくなった方のプレーヤーの負けとする．

   (ii) 手番のプレーヤーは, 1 枚以上のコインが残っている山 M_i $(1 \leq i \leq n)$ を 1 つ選び, 1 枚以上の任意の枚数のコインを M_i から取り去る．

   任意の入力 $(n; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ に対し, 上記のゲームは先手必勝または後手必勝のいずれかである．どちらであるかを判定するアルゴリズムを, 動的計画法に基づいて構成し, その正当性を示せ．また, そのアルゴリズムの計算量を評価せよ．

4. 各枝が非負の長さを持ち, 有向閉路を含まない有向グラフにおいて, 指定した始点 s から終点 t への最長路を求めたい．これに関して, 以下の問いに答えよ．

   (a) 有向閉路を含まない有向グラフには, 入次数 (入ってくる枝の数) が 0 の点が必ず存在する．このことを示せ．

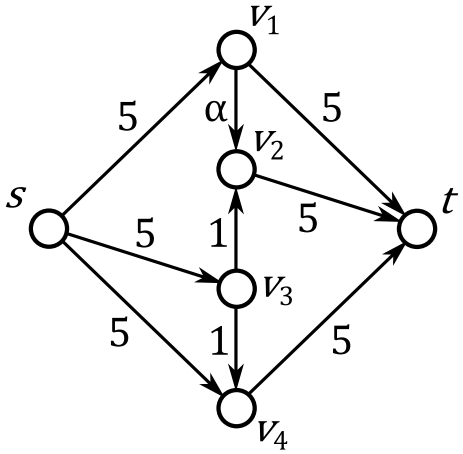
   (b) 入次数が 0 の点を順に取り除いていくというアイデアを用いて, 動的計画法に基づいたアルゴリズムを構成せよ．

   (c) 上で構成したアルゴリズムの正当性を示し, 計算量を評価せよ．

5. 最大流を求める Ford–Fulkerson のアルゴリズム (残余ネットワークにおける増加道を任意に選び, それに沿ってフローを増やせるだけ増やす) は, 枝の容量が無理数を含む場合には必ずしも停止しない. そのような例を, 図のネットワークを用いて, 以下に沿って示せ. ただし, 枝に添えられた数字および文字は, その枝の容量を表すとし, α は $1/2 < \alpha < 1$ を満たす実数とする.

   (a) 増加道を, $P_1 = (s, v_3, v_2, t)$, $P_2 = (s, v_1, v_2, v_3, v_4, t)$, $P_3 = (s, v_3, v_2, v_1, t)$, P_2, $P_4 = (s, v_4, v_3, v_2, t)$ の順に選び, それぞれの更新を行った直後の, 枝 v_1v_2, v_3v_2, v_3v_4 の残余容量 (容量からフローの値を引いたもの) を計算せよ.

   (b) α を適当な無理数に選べば, (a) の後に P_2, P_3, P_2, P_4 に沿った更新を無限に繰り返すことができることを示せ.



6. Ford–Fulkerson のアルゴリズムにおいて, 常に最短の (枝数が最小の) 増加道を選ぶとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

   (a) 非負整数 k に対し, k 回目のフロー更新直後の残余ネットワークにおける始点 s から各点 v への最短有向路の長さを $d_k(v)$ で表す (有向路が存在しない場合, (頂点数) $+ 1$ とする). このとき, 任意の点 v に対して $d_k(v) \leq d_{k+1}(v)$ を示せ.

   (b) フロー更新により, 選ばれた増加道中の少なくとも 1 本の枝は残余ネットワークから取り除かれる. $0 < i < j$ なる整数 i, j に関して, i 回目のフロー更新により取り除かれた枝 uv が, j 回目のフロー更新により初めて再び残余ネットワークに現れたとする. このとき, $d_{i-1}(u) < d_{j-1}(u)$ が成り立つことを示せ.

   (c) この方法で増加道を選ぶ場合の反復回数 (フロー更新の回数) を評価せよ.

7. Menger の定理「任意の有向グラフ中の任意の異なる 2 点 s, t に対して, s から t への辺素な有向路の最大本数は, s から t への有向路をなくすために取り除くべき枝の最小本数に等しい」に関連して, 以下の問いに答えよ. ただし, この定理が成り立つことを用いてよい.

   (a) 無向グラフにおいても同様の主張「任意の無向グラフ中の任意の異なる 2 点 s, t に対して, s から t への辺素な無向路の最大本数は, s から t への無向路をなくすために取り除くべき枝の最小本数に等しい」が成り立つ. このことを示せ.

   (b) 点素 (途中で点を共有しない) の場合にも同様の主張「任意の有向グラフ中の任意の異なる 2 点 s, t に対して, s から t への点素な有向路の最大本数は, s から t への有向路をなくすために取り除くべき s, t 以外の点の最小個数に等しい」が成り立つ. このことを示せ.